公職技師工程數學

95-101歷試詳解

勘誤內容

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^a \cos wx\,dx = 2\frac{\sin wx}{w}\Big|_0^a \\
&= \frac{2\sin wa}{w}
\end{aligned}
$$

(2) 因

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \mathscr{F}^{-1}\{\frac{2\sin wa}{w}\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin wa}{w}e^{iwx}\,dw \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin wa}{w}(\cos wx + i\sin wx)\,dw \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin wa\ \cos wx}{w}dw
\end{aligned}
$$

即

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin wa\ \cos wx}{w}dw = \begin{cases} \pi & ;\ |x| < a \\ 0 & ;\ |x| > a \\ \dfrac{\pi}{2} & ;\ x = \pm a \end{cases}
$$

(3)

$$
\int_0^{\infty}\frac{\sin wa}{w}dw = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin wa}{w}dw = \frac{1}{2}\pi F(0) = \frac{\pi}{2}
$$

3. 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$，試求

(1) A 之特徵值 (eigenvalues) (3分)

(2) A 之特徵向量 (eigenvectors) (3分)

(3) 計算 $e^{-A} = ?$ (4分) 《喻超凡, 喻超弘 95電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞

(1) 由 $\det(A - \lambda I) = 0$，可得 A 的特徵值爲 $\lambda = 4$ 、-3 。

(2) 將 $\lambda = 4$ 代回 $(A - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$
\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

可得對應的特徵向量爲

$$X = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

將 $\lambda = -3$ 代回 $(A - \lambda I)X = 0$ 中可得

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可得對應的特徵向量爲

$$X = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

(3) 令

$$e^{-A} = a\,A + b\,I$$

將 $\lambda = 4$ 、-3 代入上式，可得

$$\begin{cases} e^{-4} = 4a + b \\ e^{3} = -3a + b \end{cases}$$

故

$$a = \frac{1}{7}(e^{-4} - e^{3}) \ , \ b = \frac{1}{7}(3\,e^{-4} + 4\,e^{3})$$

則

$$e^{-A} = \frac{1}{7}(e^{-4} - e^{3})A + \frac{1}{7}(3\,e^{-4} + 4\,e^{3})I$$

4. 有一表面 S 如下 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, 假設有一向量函數爲 $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 請計算 $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$ 之值 。(10分)

《**喻超凡**, **喻超弘** 95電力、電子、醫工高考》

5. 下列敘述何者正確？

(A) 如果 A 是赫米特矩陣 (Hermitian matrix)，並且 $A^2 = I$，I 是單位矩陣，則 A 也是么正矩陣 (unitary matrix)

(B) 赫米特矩陣的行列式值 (determinant) 不一定是實數 (real)。

(C) 令 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(M)$ 表示矩陣 M 之所有特徵值 (eigenvalue) 的總和。現給予 A、B 兩矩陣，則 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(B) \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A+B)$

(D) 如果一個矩陣有重複的 (repeated) 特徵值，則此矩陣無法對角化 (diagonalizable)

《喻超凡, 喻超弘 95電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (A)；A 為赫米特矩陣，則 $A^* = A$，故

$$A^2 = AA = A^*A = I$$

則 A 為 unitary 矩陣

6. 試求微分方程式 $x^2dy - 2ydx = -(y^2 + 2x)dy$ 之通解，其中 c 為任意常數。

(A) $y = 2\cos^{-1}(x/y) + c$ (B) $y = 2\cot^{-1}(x/y) + c$

(C) $y = 2\sec^{-1}(x/y) + c$ (D) $y = 2\tan^{-1}(x/y) + c$

《喻超凡, 喻超弘 95電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D)；原式可改寫成

$$-2(ydx - xdy) + (x^2 + y^2)dy = 0 \;\Rightarrow\; -2\frac{d(xy^{-1})}{y^{-2}} + (x^2 + y^2)dy = 0$$

即

$$-\frac{2}{1 + (\frac{x}{y})^2} d(\frac{x}{y}) + dy = 0$$

9. 下列何者與 $\mathscr{L}\{f(t)\,u(t-a)\}$ 相等，其中 $\mathscr{L}\{\cdot\}$ 代表拉氏換 (Laplace transform)?

(A) $\boxed{e^{-as}}\mathscr{L}\{a\,f(t)\}$ (B) $\boxed{e^{-as}}\mathscr{L}\{\frac{df}{dt}\}$ (C) $\boxed{e^{-as}}\mathscr{L}\{a\,f(t-a)\}$
(D) $\boxed{e^{-as}}\mathscr{L}\{f(t+a)\}$ 《喻超凡, 喻超弘 95電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D)；$\mathscr{L}\{f(t)\,u(t-a)\} = \boxed{e^{-as}}\mathscr{L}\{f(t+a)\}$

10. 若微分方程式 $y'' - 4y' + 4y = 25\sin x$ 且 $y(0)=3$、$y'(0)=2$，試求其解？
(A) $y = e^{2x} + 2xe^{2x} + \cos x$ (B) $y = 3e^{2x} - 5xe^{2x} + \sin x$
(C) $y = 2e^{2x} + 2xe^{2x} + \cos x + \sin x$ (D) $y = -e^{2x} + xe^{2x} + 3\sin x + 4\cos x$
《喻超凡, 喻超弘 95電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D)；齊次解：令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \;\Rightarrow\; m = 2\,,\,2$$

故

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

特解

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{D^2 - 4D + 4} 25\sin x \\ &= 25\,\frac{4D+3}{-(4D-3)(4D+3)}\sin x \\ &= 25\,\frac{4D+3}{-(16D^2-9)}\sin x \\ &= (4\cos x + 3\sin x) \end{aligned}$$

通解

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + 4\cos x + 3\sin x$$

2.95年地方政府電力、電子工程三等考試

甲、申論題部分 (50分)

1. 求出下列微分方程式的解：$2x - y\sin(xy) + \{3y^2 - x\sin(xy)\}y' = 0$；$y(0) = 2$ (其中 $y' = \dfrac{dy}{dx}$)。(15分) **《喻超凡, 喻超弘** 95地方特考電力、電子工程**》**

《解》 ☞ 原式可改寫成

$$\{2x - y\sin(xy)\}dx + \{3y^2 - x\sin(xy)\}dy = 0$$

即

$$d\{x^2 \boxed{+\cos(xy)} + y^3\} = 0$$

故 ODE 的通解爲

$$x^2 + \cos(xy) + y^3 = c$$

由 $y(0) = 2$, 可得 $1 + 2^3 = c$, 則 $c = 9$, 故 ODE 的特解爲

$$x^2 + \cos(xy) + y^3 = 9$$

2. 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(1) 請計算 $(I - A)^{-1} = ?$ (5分)
(2) 請計算 $A^2 + A^3 = ?$ (5分)
(3) 請證明 $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$ 。(5分)

《喻超凡, 喻超弘 95地方特考電力、電子工程**》**

《解》 ☞

《解》 ☞ (C)；因 $v(x\,,\,y)$ 為 $u(x\,,\,y)$ 的調和共軛，則

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x \;\Rightarrow\; v(x\,,\,y)=2xy+f_1(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y \;\Rightarrow\; v(x\,,\,y)=2xy+f_2(y)$$

比較兩式可得

$$v(x\,,\,y)=2xy+c$$

13. C 為任意一簡單封閉曲線，而 z_0 為一在 C 內之點，則下列何者正確？

(A) $\oint_C dz=2\pi\,i$ (B) $\oint_C z\,dz=2\pi\,i$ (C) $\oint_C (z-z_0)dz=2\pi\,i$

(D) $\oint_C (z-z_0)^{-1}dz=2\pi\,i$ 《喻超凡, 喻超弘 95地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (D)；令 $f(z)=\dfrac{1}{z-z_0}$，故 $f(z)$ 在 C 內具有 $z=z_0$ 的一階 pole，且

$$\text{Res}f(z_0)=1$$

故

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0}\,dz=2\pi\,i\;\text{Res}f(z_0)=2\pi\,i$$

14. 假設 $f(x)$ 為週期性函數，週期為 4，$f(x)$ 定義如下，求出傅立葉級數

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\dfrac{n\pi x}{2}$ 中 b_n 項為何？ $f(x)=\begin{cases}-1 & ;\ -2<x<-1\\ 0 & ;\ -1<x<1\\ 1 & ;\ 1<x<2\end{cases}$

(A) $\dfrac{1}{n\pi}(\cos\dfrac{n\pi}{2}+\cos n\pi)$ (B) $\dfrac{1}{n\pi}(\cos\dfrac{n\pi}{2}-\cos n\pi)$

(C) $\dfrac{2}{n\pi}(\cos\dfrac{n\pi}{2}+\cos n\pi)$ (D) $\dfrac{2}{n\pi}(\cos\dfrac{n\pi}{2}-\cos n\pi)$

《喻超凡, 喻超弘 95地方特考電力、電子工程》

19. 從 1 到 1000 的整數中隨意任選一個數字，求這個數字可以被 4 或是 7 或是 9 整除的機率爲何？
(A) 0.583 (B) 0.503 (C) 0.429 (D) 0.406
《**喻超凡, 喻超弘** 95地方特考電力、電子工程》

《**解**》☞ (C)；令 [·] 表示最大整數函數，故機率爲

$$\frac{1}{1000}\{[\frac{1000}{4}]+[\frac{1000}{7}]+[\frac{1000}{9}]-[\frac{1000}{4\times 7}]-[\frac{1000}{4\times 9}]-[\frac{1000}{7\times 9}]+[\frac{1000}{4\times 7\times 9}]\}$$
$$=\frac{1}{1000}(250+142+111-35-27-15+3)=0.429$$

20. 假設 X 是柏松分配 (Poisson distribution)，其機率函數爲 $P(X=k)=\dfrac{e^{-a}a^k}{k!}$，$a>0$，若 $P(X=2)=2\,P(X=1)/3$，則 $P(X=0)$ 爲：
(A) $e^{-1/4}$ (B) $e^{-3/4}$ (C) $e^{-1/3}$ (D) $e^{-4/3}$
《**喻超凡, 喻超弘** 95地方特考電力、電子工程》

《**解**》☞ (D)；由 $P(X=2)=\dfrac{2}{3}P(X=1)$，可得

$$\frac{e^{-a}a^2}{2!}=\frac{2}{3}\frac{e^{-a}a}{1!}\ \Rightarrow\ a=\frac{4}{3}$$

故

$$P(X=0)=\frac{e^{-4/3}(\frac{4}{3})^0}{0!}=e^{-4/3}$$

可得

$$E[XY] = \textbf{Cov}\,(X\,,\,Y) + E[X]\,E[Y] = 0.8 + 1 \times 2 = 2.8$$

(2)

$$E[W] = E[X + 3Y] = E[X] + 3E[Y] = 1 + 3 \times 2 = 7$$

(3)

$$E[W^2] = E[(X + 3Y)^2] = E[X^2 + 6XY + 9Y^2] = E[X^2] + 6E[XY] + 9E[Y^2] \quad (1)$$

因

$$E[X^2] = \sigma_X^2 + (E[X])^2 = 4 + 1 = 5$$

$$E[Y^2] = \sigma_Y^2 + (E[Y])^2 = 1 + 2^2 = 5$$

代回 (1) 式可得

$$E[W^2] = 5 + 6 \times 2.8 + 9 \times 5 = 66.8$$

因此

$$\textbf{Var}\,(W) = E[W^2] - (E[W])^2 = 66.8 - 7^2 = 17.8$$

(4)

$$\begin{aligned} E[WU] &= E[(X + 3Y)(-X + 2Y)] \\ &= E[-X^2 - XY + 6Y^2] \\ &= -E[X^2] - E[XY] + 6E[Y^2] \\ &= -5 - 2.8 + 6 \times 5 \\ &= 22.2 \end{aligned}$$

16. 有一週期函數 $f(x)=e^x$，其中 $-\pi<x<\pi$，且 $f(x+2\pi)=f(x)$，求其 $c_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx=?$

(A) $\dfrac{\sinh\pi}{\pi}(-1)^n\dfrac{1+in}{1+n^2}$　(B) $\dfrac{\sinh\pi}{\pi}(-1)^n\dfrac{1+in}{n^2}$　(C) $\dfrac{\sinh\pi}{2\pi}(-1)^n\dfrac{1+in}{1+n^2}$

(D) $\dfrac{\sinh\pi}{2\pi}(-1)^n\dfrac{1+in}{n^2}$

《喻超凡, 喻超弘 96電力、電子高考》

《解》☞ (A)；

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,e^{-inx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^x e^{inx}}{1-in}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{\pi}e^{in\pi}-e^{-\pi}e^{-in\pi}}{1-in} \\ &= \frac{1}{\pi}\sinh\pi\,(-1)^n\frac{1+in}{1+n^2} \end{aligned}$$

17. 下列何者爲 $(\cos y+y\cos x)dx+(\sin x-x\sin y)dy=0$ 之解？

(A) $y\cos x+x\sin y=c$　(B) $x\cos y+y\sin x=c$

(C) $x\cos x+y\sin y=c$　(D) $y\cos y+x\sin x=c$

《喻超凡, 喻超弘 96電力、電子高考》

《解》☞ (B)；原式可改寫成

$$d(x\cos y+y\sin x)=0$$

ODE 的通解爲

$$x\cos y+y\sin x=c$$

2.96年地方政府電力、電子、電信工程三等考試

甲、申論題部分 (50分)

1. 若 y_1 、y_2 是 $\ddot{y}+P(x)\dot{y}+Q(x)y=0$ 的兩個解，試證明 (10分)

$$W=\boxed{y_1\dot{y}_2-y_2\dot{y}_1}=k\ \exp\{-\int P(x)\,dx\}$$

《喻超凡, 喻超弘96地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 ☞ 因 $y_1(x)$ 、$y_2(x)$ 為

$$y''(x)+P(x)y'(x)+Q(x)y(x)=0$$

特解，則

$$y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x)=0 \tag{1}$$

$$y_2''(x)+P(x)y_2'(x)+Q(x)y_2(x)=0 \tag{2}$$

(1) × $y_2(x)$ − (2) × $y_1(x)$ 可得

$$\{y_1''(x)y_2(x)-y_2''(x)y_1(x)\}+P(x)\{y_1'(x)y_2(x)-y_2'(x)y_1(x)\}=0 \tag{3}$$

因 $y_1(x)$ 、$y_2(x)$ 的 Wronskian 行列式為

$$W(y_1\,,\,y_2)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x) \tag{4}$$

且

$$W'(y_1\,,\,y_2)=\{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)\}'=y_1(x)y_2''(x)-y_2(x)y_1''(x) \tag{5}$$

(4) 、(5) 兩式代回 (3) 式可得

$$W'(y_1\,,\,y_2)+P(x)W(y_1\,,\,y_2)=0 \tag{4}$$

利用分離變數法, 可解得 (4) 式的解為

$$W(y_1\,,\,y_2)=k\ \exp\{-\int P(x)\,dx\} \quad ;\ (\ k \text{ 為常數 })\tag{5}$$

其中 $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$，整理可得

$$(s^2+4)Y(s) = \frac{3s+1}{s^2}e^{-3s}$$

即

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3s+1}{s^2(s^2+4)}\ e^{-3s} \\ &= \{\frac{1}{4s^2}+\frac{3}{4s}-\frac{3s+1}{4(s^2+4)}\}\ e^{-3s} \end{aligned}$$

故

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \{\frac{t-3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cos 2(t-3)-\frac{1}{8}\sin 2(t-3)\}H(t-3)$$

4. (1) 計算 $\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz$，其中 C 為圓 $|z-1|=3$，z 為複變數。(5分)

(2) 計算 $\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz$，其中 C 為包圍 $z=1$ 的任意封閉曲線。(5分)

《喻超凡, 喻超弘 96地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 ☞

(1) 令 $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}$，則 $f(z)$ 在 C 內具有 $z=0$、$z=-1$ 的一階 poles，且

$$\mathrm{Res}f(0) = \left.\frac{e^z}{(z+1)}\right|_{z=0} = 1$$

$$\mathrm{Res}f(-1) = \left.\frac{e^z}{z}\right|_{z=-1} = -\frac{1}{e}$$

故

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = 2\pi i\{\mathrm{Res}f(0)+\mathrm{Res}f(-1)\} = 2\pi i\,\{1-\frac{1}{e}\}$$

(2) 令 $g(z) = \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}$，則 $g(z)$ 在 C 內具有 $z=1$ 的 3 階 pole，且

$$\mathrm{Res}g(1) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}(z-1)^3g(z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}(5z^2-3z+2) = 5$$

故

$$\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}g(1) = 2\pi i\ \times 5 = 10\pi i$$

4. 將函數 $\dfrac{1}{z^3 - z^4}$ 以 Laurent 級數展開得 $\dfrac{1}{z^3 - z^4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\dfrac{-1}{z^{n+4}}}$, 其收斂區間爲：

(A) $|z| > 0$ (B) $0 < |z| < 1$ (C) $|z| > 1$ (D) $z \in \mathbb{C}$

《**喻超凡, 喻超弘** 96地方特考電力、電子、電信工程》

《**解**》☞ (C)；因

$$\lim_{n\to\infty} \boxed{\left|\frac{\frac{-1}{z^{n+5}}}{\frac{-1}{z^{n+4}}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

級數收斂，故可得 $|z| > 1$ 。

5. 試求反拉氏轉換 (inverse Laplace Transform) $\mathscr{L}^{-1}\{\dfrac{3s+2}{\{(s+1)^2+1\}^2}\}$ 。

(A) $e^{-t}t\cos t - e^{-t}(\cos t - t\sin t)$ (B) $\dfrac{3}{2}e^{-t}t\sin t - \dfrac{1}{2}e^{-t}(\sin t - t\cos t)$

(C) $e^{-t}\sin t - e^{-t}(\sin t - t\cos t)$ (D) $t\sin t - (\sin t - t\cos t)$

《**喻超凡, 喻超弘** 96地方特考電力、電子、電信工程》

《**解**》☞ (B)；因 $\mathscr{L}^{-1}\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\} = \cos at$, 兩端對 a 微分，可得

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}\} = -t\sin at$$

故

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\} = \frac{t}{2a}\sin at$$

因 $\mathscr{L}^{-1}\{\dfrac{1}{s^2+a^2}\} = \dfrac{1}{a}\sin at$, 兩端對 a 微分，可得

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{-2a}{(s^2+a^2)^2}\} = -\frac{1}{a^2}\sin at + \frac{t}{a}\cos at$$

《解》 ☞ (B) ; 設 λ_1 、λ_2 爲 A 的特徵值 , 故

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = tr(A) = 10 \\ \lambda_1\lambda_2 = \det(A) = 24 \end{cases}$$

則 A 的特徵方程式爲

$$\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$$

因此 $\lambda_1 = 4$ 、$\lambda_2 = 6$

10. 下列敘述何者正確 ?

(A) 如果 Q 是一個正交矩陣 (orthogonal matrix) , λ 是 Q 的一個特徵值 (eigenvalue) , 則 $|\lambda| = 1$

(B) 如果向量 x 與向量 y 互相正交 (orthogonal) , 並且 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ 是一個投影矩陣 (projection matrix) , $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 則 Px 與 Py 互相正交

(C) 如果矩陣 B 是由矩陣 A 交換其中二列 (row) 所形成 , 則 B 相似 (similar) 矩陣 A

(D) 矩陣 A 與矩陣 A^T 具有相同的特徵值 (eigenvalue) 與特徵向量 (eigenvector)

《喻超凡, 喻超弘 96地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 ☞ (A) ; 因 Q 爲正交矩陣 , 故 $Q^TQ = Q^*Q = I$, 且令 λ 爲 Q 的特徵值, 且對應的特徵向量爲 X , 則 $QX = \lambda X$, 故

$$(QX)^* = (\lambda X)^* \;\Rightarrow\; X^*Q^* = \overline{\lambda}X^*$$

$$X^*Q^*(QX) = \overline{\lambda}X^*(\lambda X) \;\Rightarrow\; X^*(Q^*Q)X = |\lambda|^2X^*X$$

$$X^*X = |\lambda|^2X^*X \;\Rightarrow\; (1-|\lambda|^2)X^*X = 0$$

因 $X^*X = \|X\|^2 \neq 0$, 故 $|\lambda|^2 - 1 = 0$, 即 $|\lambda| = 1$ 。

11. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 則下列何組之向量可構成矩陣 A^T 的值域空間 (range space)?

(A) $\{(1\,,\,0)^T\,,\,(0\,,\,1)^T\}$ (B) $\{(1\,,\,-2)\,,\,(0\,,\,1)\}$ (C) $\{(-1\,,\,0\,,\,1)^T\,,\,(0\,,\,1\,,\,1)^T\}$

(D) $\{(1\,,\,0\,,\,-2)^T\,,\,(0\,,\,1\,,\,1)^T\}$

《喻超凡, 喻超弘 96地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 ☞ (D) ; $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{2}^{(-1/2)}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_{21}^{(-3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

故 A^T 的值域空間基底爲 $\{(1\,,0\,,-2)^T\,,(0\,,1\,,1)^T\}$

12. 假設一個無窮複數級數 (infinite series) 之和爲 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$, 則 $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z}_n$ 之值應爲何 ? 其中 $\overline{z}$ 表示 z 的共軛複數 (complex conjugate) 。
(A) 0 (B) $\overline{S}$ (C) iS (D) $-S$
《喻超凡, 喻超弘 96地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 ☞ (B) ; $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z}_n = \overline{\{\sum_{n=1}^{\infty} z_n\}} = \overline{S}$

13. 令 $\vec{v}$ 爲一常數向量 , 而 $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 則 $\nabla\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ 等於多少 ?
(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\|v\|$
《喻超凡, 喻超弘 96地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 ☞ (C) ; $\nabla\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \nabla\cdot\vec{u} = 3$

14. 令 C 表示一個從 $z=i$ 至 $z=1$ 的線段 , $M = \left|\int_C \frac{dz}{z^4}\right|$, 則 M 之最小上界 (least upper bound) 爲何 ?
(A) $2\sqrt{2}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) 8 (D) $8\sqrt{2}$
《喻超凡, 喻超弘 96地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 ☞ (B) ; 因 C 的方程式爲 $x+y=1$, 故 C 上的 $z=x+iy=x+i(1-x)$, $(0\le x\le 1)$,

17. 若 $y_1 = e^x$ 是微分方程式 $(1-2x)\ddot{y} + 2\dot{y} + (2x-3)y = 0$ 的一解，試求此微分方程式之通解，其中 c，k 爲任意實數。
(A) $y = ce^x + kxe^{-x}$ (B) $y = c\ln x + kx\ln x$ (C) $y = ce^{-x} + kxe^x$
(D) $y = c\ln x - kx\ln x$ 《**喻超凡, 喻超弘** 96地方特考電力、電子、電信工程》

《**解**》☞ (A)；ODE 的另外一個線性獨立的解爲

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{2}{1-2x}\,dx}}{y_1^2} dx \\ &= e^x \int \frac{e^{\ln|2x-1|}}{\boxed{e^{2x}}} dx \\ &= e^x \int (2x-1)e^{-2x}\,dx \\ &= e^x\{-\frac{1}{2}(2x-1)e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\} \\ &= -xe^{-x} \end{aligned}$$

故 ODE 的通解爲

$$y(x) = c_1e^x + kxe^{-x}$$

18. 定義函數 $f(t)$ 的傅利葉轉換 (Fourier transform) 爲 $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt$，其中 $i = \sqrt{-1}$。求 $f(t)\cos(w_0t)$ 的傅利葉轉換爲何？
(A) $\frac{1}{2}\{F(w+w_0) - F(w-w_0)\}$ (B) $\frac{1}{2}\{F(w+w_0) + F(w-w_0)\}$
(C) $\frac{1}{2i}\{F(w+w_0) - F(w-w_0)\}$ (D) $\frac{1}{2i}\{F(w+w_0) - F(w-w_0)\}$
《**喻超凡, 喻超弘** 96地方特考電力、電子、電信工程》

《**解**》☞ (B)；

$$\mathscr{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \mathscr{F}\{f(t)\frac{e^{iw_0t} + e^{-iw_0t}}{2}\} = \frac{1}{2}\{F(w+w_0) + F(w-w_0)\}$$

19. 求原點到平面 $4x+2y+4z=12$ 的距離為何？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
《喻超凡, 喻超弘 96地方特考電力、電子、電信工程》

《解》☞ (B)；

$$d=\left|\frac{4\cdot 0+2\cdot 0+4\cdot 0-12}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}}\right|=2$$

20. 試問微分方程式 $x\dot{y}=y-5$，$y(0)=5$，有幾個解？
(A) 無解 (B) 無限多解 (C) 恰有一解 (D) 有限多解
《喻超凡, 喻超弘 96地方特考電力、電子、電信工程》

《解》☞ (B)；原式可改寫成

$$\boxed{\frac{dy}{dx}}-\frac{1}{x}y=-\frac{5}{x}$$

積分因子為

$$I=\exp\{\int(-\frac{1}{x})\,dx\}=\exp\{-\ln x\}=\frac{1}{x}$$

故

$$Iy=\int\frac{1}{x}(-\frac{5}{x})\,dx=\frac{5}{x}+c$$

故

$$y(x)=5+cx$$

由 $y(0)=5$，則 c 為任意數，故 ODE 具有無窮多組解。

4. 令 X 和 Y 是兩個獨立的隨機變數，其機率密度函數 (probability density function) 分別表示爲 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。令隨機變數 Z 定義如下：$Z = X + Y$

(1) 証明隨機變數 Z 的機率密度函數 $f_Z(z)$ 和 $f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$ 間具有下面的關係

$$f_Z(z) = f_X(x) * f_Y(y)$$

其中 "*" 意指摺積 (convolution operation)。(5分)

(2) 假設 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 的表示如下

$$f_X(x) = \frac{1}{a}\{u(x) - u(x-a)\}$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{b}\{u(y) \boxed{- u(y-b)\}}$$

其中 $0 < a < b$，而 $u(*)$ 代表單位步階函數 (unit-step function)。求算隨機變數 Z 的機率密度函數 $f_Z(z)$，並繪圖表示之。(10分)

《**喻超凡, 喻超弘** 97電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞

(1) 因 X、Y 爲兩個獨立的隨機變數，故隨機變數 X、Y 的聯合機率密度函數爲

$$f_{XY}(x\,,\,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

因 $Z = X + Y$，故隨機變數 X、Z 的聯合機率密度函數爲

$$f_{XZ}(x\,,\,z-x) = f_X(x)f_Y(z-x)$$

則

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XZ}(x\,,\,z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx = f_X(z) * f_Y(z)$$

(2) 因

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$$

(a) $0 \le z < a$

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}\,dx = \frac{1}{ab}\,x\Big|_0^z = \frac{z}{ab}$$

(b) $a \le z < b$

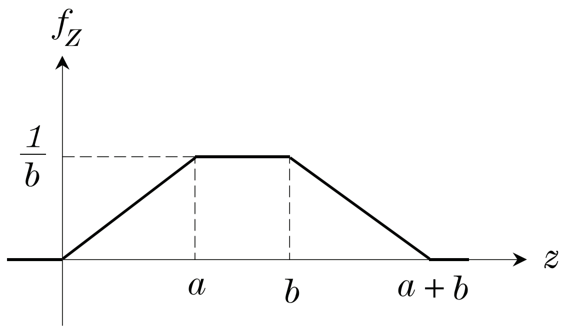
$$f_Z(z) = \int_{z-a}^{z} \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}\, dx = \frac{1}{ab}\; x\Big|_{z-a}^{z} = \frac{a}{ab} = \frac{1}{b}$$

(c) $b \le z < b+a$

$$f_Z(z) = \int_{z-a}^{b} \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}\, dx = \frac{1}{ab}\; x\Big|_{z-a}^{b} = \frac{1}{ab}(b+a-z)$$

(d) 其他 $f_Z(z) = 0$

(e) 圖



14. 令 A 與 B 皆爲 3×3 的矩陣 (matrix)，現已知 A 的行列式 (determinant) 値是 2，B 的行列式値是 5，且 $\Delta = 3AB$。則 Δ 的行列式値是：
(A) 30 (B) 90 (C) 180 (D) 270
《喻超凡，喻超弘 97電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞ (D)；

$$\det(\Delta) = \det(3AB) = 3^3 \times \det(A)\det(B) = 27 \times 2 \times 5 = 270$$

15. 下列敘述何者正確？
(A) 如果矩陣 $AB = 0$，則矩陣 $A = 0$，或矩陣 $B = 0$，或 $A = B = 0$
(B) 如果矩陣 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的第一列 (row) 與第三列相同，則矩陣 AB 的第一列與第三列也相同，其中 $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$
(C) 如果矩陣 $A \neq 0$，矩陣 $B \neq 0$，矩陣 $C \neq 0$，並且 $AC = BC$，則 $A = B$
(D) 如果矩陣 A，矩陣 B 皆爲對稱矩陣 (symmetric matrix)，則 AB 也是對稱矩陣
《喻超凡，喻超弘 97電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞ (B)；令

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

其中 A_1、A_2、$\cdots$、A_m 爲 A 的列向量，故

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1B \\ A_2B \\ A_3B \\ \vdots \\ A_mB \end{bmatrix}$$

代回 ODE 中可得

$$3\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} e^{3t} \} + \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} e^{3t}$$

比較係數可得

$$\begin{cases} 3a + 3b + 8 = 0 \\ a + 5b = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3c = 3c + \boxed{3d} \\ 3d = c + 5d + 4 \end{cases}$$

可解得 $a = -\dfrac{10}{3}$ 、$b = \dfrac{2}{3}$ 、$c = -4$ 、$d = 0$, 故

$$X_p = \begin{bmatrix} -\dfrac{10}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

ODE 的通解爲

$$X = X_h + X_p = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} + \begin{bmatrix} -\dfrac{10}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

由

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{10}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可解得 $c_1 = \dfrac{17}{4}$ 、$c_2 = -\dfrac{41}{12}$, 故 ODE 的特解爲

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{17}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} - \frac{41}{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} + \begin{bmatrix} -\dfrac{10}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

2. 考慮一條電線四分之一圓的電線 C , 其定義爲

$$C = \{x = 2\cos t \, , \, y = 2\sin t \, , \, 0 \le t \le \pi/2\}$$

假設在 C 上的質量密度函數爲 $\rho(x\,,\,y) = xy^2$, 試計算其質心的座標 $(\overline{x}\,,\,\overline{y})$ 。(10分) 《喻超凡, 喻超弘 97電子身障特考》

3. 97年鐵路人員電力工程三級特考

甲、申論題部分 (50分)

1. 求出下列微分方程式的通解：$y'' + 2y' + y = -3e^{-x} + 8xe^{-x} + 1$ (其中 $y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$)。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 97鐵路電力特考》

《解》 ☞

(1) 齊次解：令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \;\Rightarrow\; m = -1\,,\,-1$$

故

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

(2) 特解：

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{(D+1)^2}(-3e^{-x}) + \frac{1}{(D+1)^2}(8xe^{-x}) + \frac{1}{(D+1)^2}1 \\ &= (-3)\frac{x^2}{2}e^{-x} + 8e^{-x}\frac{1}{D^2}x + 1 \\ &= -\frac{3}{2}x^2e^{-x} + 8e^{-x}\boxed{\iint x\,dx\,dx} + 1 \\ &= -\frac{3}{2}x^2e^{-x} + 8e^{-x}\frac{x^3}{6} + 1 \\ &= -\frac{3}{2}x^2e^{-x} + \frac{4}{3}x^3e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

(3) 通解：$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，求 $A^{1000} = ?$ (5分) 及 $A^{-1000} = ?$ (5分)

《喻超凡, 喻超弘 97鐵路電力特考》

3. 一個溫度計現在顯示 5^oC，把它放入一個 22^oC 的房間內，一分鐘後溫度計顯示爲 12^oC，則需要多久後，溫度計顯示爲 22^oC 左右？
(A) 9.68 mins (B) 22.82 mins (C) 17.64 mins (D) 11.36 mins
《喻超凡, 喻超弘 97地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (A)；設在時間 t 時溫度計的溫度爲 T，由牛頓冷卻定律知

$$\frac{dT}{dt} = k(T-22)$$

k 爲常數，分離變數可得

$$\frac{dT}{T-22} = k\,dt \quad 故 \quad \int \frac{dT}{T-22} = \int k\,dt$$

即

$$T(t) = 22 + ce^{kt} \tag{1}$$

又 $t=0$ 時，$T(0)=5$，代入 (1) 式可得 $c=-17$，當 $t=1$ 時，$T(1)=12$，再代入 (1) 可得

$$12 = 22 - 17e^{k}$$

可得 $k = \ln\dfrac{10}{17}$，則

$$T(t) = 22 - 17e^{(\ln\frac{10}{17})t} \tag{2}$$

將 $T(t)=21.9$ 代入 (2) 式可得

$$21.9 = 22 - 17e^{(\ln\frac{10}{17})t}$$

故可解得

$$t = \frac{\ln\dfrac{0.1}{17}}{\ln\dfrac{10}{17}} = 9.67871$$

4. 下列何者爲 $4xdy - ydx = x^2dy$ 之解？
(A) $(x-4)y = cx$ (B) $(x-4)y^2 = cx$ (C) $(x-4)y^3 = cx$ (D) $(x-4)y^4 = cx$
《喻超凡, 喻超弘 97地方特考電力、電子工程》

於位置 $(1\,,\,0\,,\,-1)$ 之最陡降 (steepest descend) 方向

$$-\nabla\psi(1\,,\,0\,,\,-1)=-(2\vec{i}-2\vec{j})=-2\vec{i}+2\vec{j}$$

7. 求 $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, 其中 $\vec{F}=(x\,,\,y\,,\,z)=(z-2y)\vec{i}+(3x-4y)\vec{j}+(z+3y)\vec{k}$, C 表在 $z=2$ 平面上的單位圓 。
(A) 2π (B) 4π (C) 5π (D) 6π

《喻超凡, 喻超弘 97地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (C) ; C 方程式為 $x^2+y^2=1$ 、$z=2$, 令 C 所圍的區域為 S , 則 S 的法向量為 $\vec{n}=\vec{k}$, 且

$$(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-2y & 3x-4y & z+3y\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=5$$

由 Stokes' 定理可知

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA\\ &= \iint_S 5\,dA = 5\times\pi\times 1^2\\ &= 5\pi\end{aligned}$$

8. 下列線積分中 , 何者與積分路徑無關 ?
(A) $2xy^2dx+xydy+dz$ (B) $\sinh xz(zdx-xdz)$
(C) $ye^{2z}dy-ze^{y}dz$ (D) $-z\sin xz\,dx+\cos y\,dy-x\,\sin xz\,dz$

《喻超凡, 喻超弘 97地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (D) ; 令

$$\vec{F}=-z\sin xz\,\vec{i}+\cos y\,\vec{j}-x\,\sin xz\,\vec{k}$$

《解》☞ (D)；由

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=c\frac{\partial}{\partial v}-c\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial z}$$

故

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}=(c\frac{\partial}{\partial v}-c\frac{\partial}{\partial z})^2=c^2\{\frac{\partial^2}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2}{\partial v\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=(\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial z})^2=\frac{\partial^2}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2}{\partial v\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

因此

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= c^2\{\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\}-c^2\{\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\}\\ &= -4c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}=0\end{aligned}}$$

即 $\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}=0$

19. z 是一個複數 (complex number)，$z=x+iy$，x 與 y 皆為實數，則下列敘述何者正確？

(A) $0\le|\sin z|\le 1$ (B) $|\sin z|\le|\sin x|$ (C) $|\cosh z|\le\cosh x$

(D) $|\cosh z|\le|\sinh x|$ 《喻超凡, 喻超弘 97地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (C)；

$$\begin{aligned}|\cosh(x+iy)| &= |\cosh x\ \cosh(iy)+\sinh x\ \sinh(iy)|\\ &= |\cosh x\ (\cos y)+\sinh x\ (i\sin y)|\\ &= \sqrt{\cosh^2 x\ \cos^2 y+\sinh^2 x\ \sin^2 y}\\ &= \sqrt{\cosh^2 x\ (1-\sin^2 y)+\sinh^2 x\ \sin^2 y}\\ &= \sqrt{\cosh^2 x+(\sinh^2 x-\cosh^2 x)\sin^2 y}\\ &= \sqrt{\cosh^2 x-\sin^2 y}\le\cosh x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx \\
&\quad (\text{ 令 } x-1=\sin\theta\text{ , 故 } dx=\cos\theta\,d\theta\text{ 且 } \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline u & -\dfrac{\pi}{2} & \dfrac{\pi}{2} \end{array}) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{\pi}\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\cos^2\theta\,d\theta\} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(x)\,dx \\
&= \int_0^2 x^2\,\frac{2}{\pi}\sqrt{2x-x^2}\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^2 x^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx \\
&\quad (\text{ 令 } x-1=\sin\theta\text{ , 故 } dx=\cos\theta\,d\theta\text{ 且 } \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline u & -\dfrac{\pi}{2} & \dfrac{\pi}{2} \end{array}) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin\theta)^2\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{\pi}\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\,\cos^2\theta\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta\} \\
&= 1+\frac{2}{\pi}B(\frac{3}{2}\text{ , }\frac{3}{2}) = 1+\frac{2}{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)} \\
&= 1+\frac{2}{\pi}\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2} = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\mathbf{Var}\,(X) = E[X^2]-(E[X])^2 = \frac{5}{4}-1 = \frac{1}{4}
$$

因 $U=\sum_{n=1}^{\infty} 10^6$, 故 $U \sim N(10^6\times 1\text{ , }10^6\times\frac{1}{4})$, 因此

$$
\begin{aligned}
P(U>1002000) &= P(\frac{U-10^6}{\frac{1}{2}\times 10^3} > \frac{1002000-10^6}{\frac{1}{2}\times 10^3}) \\
&= P(Z>4) = 1-P(Z\le 4) = 1-\Phi(4)
\end{aligned}
$$

3. 解微分方程式 $(x-1)^2y''+3(x-1)y'+y=x$，$(x-1>0)$。(15分)

《喻超凡, 喻超弘97電子技師》

《解》 ☞ 令 令 $(x-1)=e^t$, 故 $t=\ln(x-1)$, 故

$$(x-1)y'=Dy\ ,\ \boxed{(x-1)^2y''}=D(D-1)y$$

其中 $D=\dfrac{d}{dt}$, 代回 ODE 中可得

$$D(D-1)y+3Dy+y=e^t+1$$

即

$$(D^2+2D+1)y=e^t+1$$

(1) 齊次解：令 $y=e^{mt}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2+2m+1=0\ \Rightarrow\ m=-1\,,\,-1$$

故

$$y_h=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}=c_1\frac{1}{x-1}+c_2\frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

(2) 特解：

$$\begin{aligned}y_p &= \frac{1}{(D+1)^2}e^t+\frac{1}{(D+1)^2}1\\ &= \frac{1}{4}e^t+1=\frac{1}{4}(x-1)+1\\ &= \frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

(3) 通解：$y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

4. 設隨機變數 X 爲 Poisson 分布，試證 $E[X]=a$，$\sigma_X^2=a$。(15分)

《喻超凡, 喻超弘97電子技師》

1. 98年公務人員電力、電子、電信、醫學工程高考

甲、申論題部分 (50分)

1. 試應用留數定理 (Residue Theorem) 計算下列積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$。(15分)

《喻超凡, 喻超弘 98電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ 令 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$, 由 $z^4+1=0$, 可得

$$z^4 = -1 = e^{(2k\pi+\pi)i} \;\Rightarrow\; z = e^{\frac{(2k\pi+\pi)i}{4}} \quad (k = 0\,,1\,,2\,,3)$$

爲 $f(z)$ 的 1 階 poles , 只有 $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ 、$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 在複數平面的上半面 , 且其殘值爲

$$\text{Res}f(z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i} = \frac{1}{4}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\text{Res}f(z_2) = \lim_{z\to z_2} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4}e^{-\frac{9}{4}\pi i} = \frac{1}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

故

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} \\
&= \frac{1}{2} \times 2\pi i\,\{\text{Res}f(z_1) + \text{Res}f(z_2)\} \\
&= \pi i\,\{\frac{1}{4}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})\} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

2. (1) 請用迴旋積分公式 (convolution formula) 求出 $H(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$ 的反拉普拉斯轉換式 (inverse Laplace transform)。(10分)
   (2) 寫出 $g(t) = \sin(wt+v)$ 的拉普拉斯轉換式 (Laplace transform) , 其中 w 及 v 都是常數。(5分)

《喻超凡, 喻超弘 98電力、電子、電信、醫工高考》

7. 令矩陣 $A=\begin{bmatrix}0 & b & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ a & 0 & 0\\ 0 & c & -d\end{bmatrix}$, 設 a , b , c , d 皆為正值 , 且 $A^TA=I$, 則 $a+b+c+d$ 等於多少 ?

(A) $1+\frac{2}{\sqrt{5}}$ (B) $1+\frac{4}{\sqrt{5}}$ (C) 2 (D) $2+\frac{1}{\sqrt{5}}$

《**喻超凡, 喻超弘** 98電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 ☞ (B) ; 因 A 為正交矩陣 , 故 $a=\pm 1$, 且

$$\begin{cases} b^2+(\frac{2}{\sqrt{5}})^2=1\\ (-d)^2+(\frac{2}{\sqrt{5}})^2=1\\ b(\frac{2}{\sqrt{5}})-cd=0\\ bc-d(\frac{2}{\sqrt{5}})=0\end{cases}$$

故 $b=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ 、$d=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, 當 $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 、$d=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 時 , 則 $c=\frac{2}{\sqrt{5}}$, 因此

$$a+b+c+d=1+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}=1+\frac{4}{\sqrt{5}}$$

8. 令 $\boldsymbol{u}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 向量 , 則下列敘述何者錯誤 ?

(A) $\boldsymbol{uu}^T$ 為對稱矩陣 (B) $\boldsymbol{uu}^T$ 的秩 (rank) 為 1

(C) $\boldsymbol{uu}^T$ 恆可對角化 (D) $\boldsymbol{uu}^T$ 的特徵值恆大於0

《**喻超凡, 喻超弘** 98電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 ☞ $\boxed{\text{(B) (D) ;}}$ 反例為令

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

則

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{則 } \mathbf{rank}\,(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T) = 0 \text{ , 且 } \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T \text{ 的特徵值爲 } 0 \text{ 。}}$

9. 令向量 $\boldsymbol{x} = [1 \;\; 1 \;\; -2]^T$ ，下列何者正確？
(A) $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sqrt{6}$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 2$ (B) $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 4$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sqrt{6}$
(C) $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 4$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 2$ (D) $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 2$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 4$
《喻超凡, 喻超弘 98電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ (C)；

$$\boxed{\|\boldsymbol{x}\|_1 = |1| + |1| + |-2| = 4}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{1 \;,\; 1 \;,\; |-2|\} = 2$$

10. 試求當線性聯立方程式：$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + (a^2 - 8)y = a \end{cases}$ ，具有無窮多組解時，$a = ?$
(A) $a = -3$ (B) $a = 3$ (C) $a = \sqrt{3}$ (D) $a = \pm 2\sqrt{2}$
《喻超凡, 喻超弘 98電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ (B)；$\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{a^2 - 8} = \dfrac{3}{a}$, 故 $a = 3$

11. 若 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換式 (Laplace transform) 爲 $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$ ，試求 $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$ 。
(A) 0 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) ∞
《喻超凡, 喻超弘 98電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 ☞ (B)；

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{2}$$

12. 以下何者爲 $\delta(t-a) * u(t+b)$ 之拉普拉斯轉換 (Laplace transform)？其中 $\delta(t)$ 爲脈衝函數 (impulse function)，$u(t)$ 爲單步階函數 (unit step function)
(A) $\dfrac{e^{bs}e^{-as}}{s}$ (B) $\dfrac{e^{-bs}e^{as}}{s}$ (C) $\dfrac{e^{bs}e^{-as}}{s^2}$ (D) $\dfrac{e^{-bs}e^{as}}{s^2}$
《喻超凡，喻超弘 98電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 ☞ (A)；

$$\mathscr{L}\{\delta(t-a) * u(t+b)\} = \mathscr{L}\{\delta(t-a)\}\ \mathscr{L}\{u(t+b)\} = e^{-as}\ \frac{e^{bs}}{s}$$

13. 已知週期爲 1 的函數 $f(x) = \begin{cases} 20 & , 0 < x < 0.5 \\ -20 & , 0.5 < x < 1 \end{cases}$，欲將 $f(x)$ 展開成 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2n\pi x$，試問 b_n 爲何值？
(A) $\dfrac{40}{n\pi}(\cos n\pi)$ (B) $\dfrac{40}{n\pi}(-\cos n\pi)$ (C) $\dfrac{40}{n\pi}(1-\cos n\pi)$ (D) $\dfrac{40}{n\pi}(1+\cos n\pi)$
《喻超凡，喻超弘 98電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 ☞ (C)；因 $f(x)$ 爲奇函數，故

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2n\pi x$$

其中

$$b_n = 4\int_0^{\frac{1}{2}} 20\,\sin(2n\pi x)\,dx = \frac{40(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

14. 有一函數 $F(x) = \begin{cases} 1 & , |x| < a \\ 0 & , |x| > a \end{cases}$，求 $F(x)$ 的傅立葉轉換 (Fourier transform) $\hat{f}(w) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-iwx}\, dx = ?$

(A) $\dfrac{2\sin wa}{w}$ (B) $\sqrt{2\pi}\,\dfrac{\sin wa}{w}$ (C) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{\sin wa}{w}$ (D) $\dfrac{\sin wa}{w}$

《喻超凡, 喻超弘 98電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ (C)；

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathscr{F}\{F(x)\}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{F(x)e}^{-iwx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} (\cos wx - i\sin wx)\, dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{a} \cos wx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin wx}{w}\bigg|_0^a \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin wa}{w}
\end{aligned}$$

15. 微分方程式 $x(1-x)y'' + \{c-(1+a+b)x\}y' - aby = 0$ 稱爲 hyper-geometric 方程式，其中的 a，b，c 爲常數。則 $x = 0$ 是此方程式的什麼點？

(A) 規則奇點 (regular singular point) (B) 不規則奇點 (irregular singular point)

(C) 正常點 (ordinary point) (D) 可解析點 (analytic point)

《喻超凡, 喻超弘 98電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ (A)；原式可改寫成

$$y'' + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)}y' - \frac{ab}{x(1-x)}y = 0$$

令 $P(x) = \dfrac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)}$、$Q(x) = -\dfrac{ab}{x(1-x)}$，則 $x = 0$ 爲 $P(x)$ 的奇點，但 $x = 0$ 爲 $xP(x)$、$x^2Q(x)$ 的常點，故 $x = 0$ 爲 ODE 的規則奇點。

《解》 ☞ (D) ; 性質

3. 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=4$, 且 $y(0)=y'(0)=0$, 求 $y(1)$ 為何 ?

(A) $4e^{-1}-8$ (B) $8e^{-1}-4$ (C) $8e^{-1}+4$ (D) $4e^{-1}+8$

《喻超凡, 喻超弘 98鐵路電力工程特考》

《解》 ☞ 無解 ; 對 ODE 兩端取 L–T , 可得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2\{sY(s)-y(0)\}+Y(s)=\frac{4}{s}$$

其中 $\mathscr{L}\{y(x)\}=Y(s)$, 整理可得

$$Y(s)=\frac{4}{s(s^2+2s+1)}=\frac{4}{s}-\frac{4}{(s+1)^2}-\frac{4}{s+1}$$

故

$$\boxed{y(x)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=4-4x\,e^{-x}-4e^{-x}}$$

故

$$y(1)=4-4e^{-1}-4e^{-1}=4-8e^{-1}$$

4. 試求反拉氏轉換 (Inverse Laplace Transform) $\mathscr{L}^{-1}\{\dfrac{3s-2}{s^2+6s+25}\}$:

(A) $3\cos 2t-2\sin 2t$ (B) $3e^{-3t}\cos 2t-2e^{-3t}\sin 2t$

(C) $3e^{-3t}\cos 4t-2.75e^{-3t}\sin 4t$ (D) $e^{-3t}\cos 2t-e^{-3t}\sin 2t$

《喻超凡, 喻超弘 98鐵路電力工程特考》

《解》 ☞ (C) ;

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\{\frac{3s-2}{s^2+6s+25}\} &= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{3s-2}{(s+3)^2+4^2}\}\\ &= e^{-3t}\mathscr{L}^{-1}\{\frac{3(s-3)-2}{s^2+4^2}\}\\ &= e^{-3t}\{3\cos 4t-\frac{11}{4}\sin 4t\}\end{aligned}$$

5. 設一三度空間內之曲線可表示爲位置向量 $\vec{F}(t)=\cos(t)\vec{i}+\sin(t)\vec{j}+\sqrt{3}t\vec{k}$，其中 $-\pi\le t\le\pi$，則該曲線長度爲何？

(A) 2π (B) $\frac{4}{3}\pi$ (C) $2\sqrt{3}\pi$ (D) 4π

《喻超凡, 喻超弘 98鐵路電力工程特考》

《解》☞ (D)；曲線 C 的參數式爲

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\sqrt{3}\,t \end{cases}$$

故

$$ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}\,dt=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+(\sqrt{3})^2}\,dt=2\,dt$$

則 C 的弧長爲

$$S=\int_C ds=\int_{-\pi}^{\pi}2\,dt=4\pi$$

6. 令 $F(s)=\mathscr{L}\{(t^3-3t+2)e^{-2t}\}$, 則下列何者正確?

(A) $F(0)=\frac{5}{8}$ (B) $F(-1)=1$ (C) $F(1)=\frac{10}{27}$ (D) $F(\infty)=1$

《喻超凡, 喻超弘 98鐵路電力工程特考》

《解》☞ (A)；

$$F(s)=\mathscr{L}\{(t^3-3t+2)e^{-2t}\}=\frac{3!}{(s+2)^4}-\frac{3}{(s+2)^2}+\frac{2}{s+2}$$

故

$$F(0)=\boxed{\frac{3}{8}-\frac{3}{4}+\frac{2}{2}=\frac{5}{8}}$$

7. 下列哪一向量與平面 $3x-5y+2z=10$ 垂直？

(A) $[1\,,\,-1\,,\,1]$ (B) $[1\,,\,1\,,\,1]$ (C) $[\frac{3}{10}\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{5}]$ (D) $[\frac{10}{3}\,,\,-2\,,\,5]$

《喻超凡, 喻超弘 98鐵路電力工程特考》

《解》☞ (C)；平面的法向量為

$$\vec{n}=3\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$$

8. $f(t)$ 是週期為 2π 的函數, 定義 $g(t)$ 為 $g(t)=\dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$，將 $g(t)$ 的傅立葉級數 (Fourier series) 表示成

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\}$$

下列敘述何者正確？

(A) $a_n=0\ ,\ n=1\,,\,2\,,\,3\cdots$ (B) $b_n=0\ ,\ n=1\,,\,2\,,\,3\cdots$ (C) $a_0\neq 0$

(D) $a_n+b_n=0\ ,\ n=1\,,\,2\,,\,3\cdots$ 《喻超凡, 喻超弘 98鐵路電力工程特考》

《解》☞ (A)；因

$$\boxed{g(-t)=\frac{f(-t)-f(t)}{2}=-\frac{f(t)-f(-t)}{2}=-g(t)}$$

故 $g(t)$ 為奇函數，則

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nt)$$

9. 矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的零空間 (null space) 可以向量形式 $\alpha v_1+\beta v_2$ 表示，其中 α 及 β 為常數，則下列何者正確？

(A) $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (B) $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(C) $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (D) $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, and $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

《**喻超凡, 喻超弘** 98鐵路電力工程特考》

《**解**》☞ (D) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow{R_{12}^{(2)}R_{13}^{(1)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{24}^{(-1/3)}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\cos nx\,dx = \frac{4\cos n\pi}{n^2}$$

故

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos n\pi}{n^2}\cos nx$$

令 $x=\pi$ 代入上式可得

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos n\pi}{n^2}\cos n\pi$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

14. 將 $F(x)=x^2$，$0<x<2\pi$，展開為傅立葉級數，當週期為 2π 時，

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

則 $b_n=?$

(A) $b_n = \dfrac{4\pi}{n}$ (B) $b_n = \dfrac{-4\pi}{n}$ (C) $b_n = \dfrac{\pi}{n}$ (D) $b_n = \dfrac{-\pi}{n}$

《喻超凡，喻超弘 98鐵路電力工程特考》

《解》☞ (B)；因 $\boxed{F(x)} = x^2\ (0<x<2\pi)$ 不具有奇偶性，故令

$$\boxed{F(x)} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}(\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx)\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}(-\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}$$

故

$$\boxed{F(x)} = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx)$$

15. 求 $\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^2}$ 之值爲何？

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 《喻超凡，喻超弘 98鐵路電力工程特考》

《解》☞ (C)；

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{\sin z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\sin z^2}\frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\sin z^2}\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2}$$

16. 假設 $z = x+iy$ 爲複數 (complex number)，下列哪一個是全函數 (entire function)?

(A) $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$

(B) $f(z) = z - \bar{z}$, $\bar{z}$ 是 z 的共軛複數 (complex conjugate)

(C) $f(z) = x\bar{z}$

(D) $f(z) = (z^2-2)e^{-x}e^{-iy}$ 《喻超凡，喻超弘 98鐵路電力工程特考》

《解》☞ (D)；因

$$f(z) = (z^2-2)e^{-x}e^{-iy} = (z^2-2)e^{-(x+iy)} = (z^2-2)e^{-z}$$

故

$$A=[b_1\ \ b_2\ \ b_3][x_1\ \ x_2\ \ x_3]^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

3. 求下列級數，當 z 爲何值時爲收斂？ 當 z 爲何值時爲發散？（z 爲複變數，$i=\sqrt{-1}$)

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{3^n}$ (5分)

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (5分) 《**喻超凡, 喻超弘** 98地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞

(1) 因

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(z-i)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\dfrac{(z-i)^n}{3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}|z-i|=\frac{1}{3}|z-i|<1$$

級數收斂，故級數在 $|z-i|<3$ 時收斂，在 $|z-i|\geq 3$ 時發散。

(2) 因

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n-1}z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\dfrac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n+1)(2n)}z^2\right|<1$$

級數收斂，即

$$|z|^2<\lim_{n\to\infty}(2n+1)(2n)=\infty$$

故 $|z|<\infty$ 時級數收斂。在複數平面上沒有點會發散。

4. 二維隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 爲

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} xy & , 0\le x\le 1\ , 0\le y\le 2 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

(1) 求 $\mathbf{Cov}(X,Y)$，即 X 與 Y 的共變異值 (covariance) 爲何？(3分) X 與 Y 是否不相關聯 (uncorrelated)？(2分)

(2) X 與 Y 是否獨立 (independent)？(5分)

《**喻超凡, 喻超弘** 98地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞

(1) 因

$$E[X]=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} x\, f_{X,Y}(x,y)\,dydx=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} x\times xy\,dydx=\frac{2}{3}$$

$$E[Y]=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} y\, f_{X,Y}(x,y)\,dydx=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} y\times xy\,dydx=\frac{4}{3}$$

$$E[XY]=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dydx=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} xy\times xy\,dydx=\frac{8}{9}$$

故

$$\mathbf{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=0$$

又相關係數

$$\rho_{XY}=\frac{\mathbf{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}=0$$

則 X、Y 不相關。

(2) 因

$$f_X(x)=\int_{y=0}^{y=2} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_{y=0}^{y=2} xy\,dy=2x\quad(0<x<1)$$

$$f_Y(y)=\int_{x=0}^{x=1} f_{X,Y}(x,y)\,dx=\int_{x=0}^{x=1} xy\,dx=\frac{y}{2}\quad(0<y<2)$$

因

$$f_{X,Y}(x,y)=xy=f_X(x)f_Y(y)\quad(0<x<1\ ,\ 0<y<2)$$

故 X、Y 爲獨立

乙、測驗題部分 (50分)

1. 下列何者為微分方程式 $y^2dx+(3xy-4y^3)dy=0$ 之通解？其中 c 為任意實數。

   (A) $y=2x^2/5+x+c/x$ (B) $y=x/5+c/x$ (C) $x=y/5+c/y$

   (D) $x=4y^2/5+c/y^3$ 《喻超凡, 喻超弘 98地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (D)；原式可改寫成

$$\frac{dx}{dy}+\frac{3}{y}x=4y$$

積分因子為

$$I=\exp\{\int\frac{3}{y}\,dy\}=\exp\{3\ln|y|\}=y^3$$

則

$$Ix=\int(y^3\times 4y)\,dy=\frac{4}{5}y^5+c$$

故

$$x=\frac{4}{5}y^2+\frac{c}{y^3}$$

2. 若 $y_1=e^{px}\cos(qx)$ 是一齊次 (homogeneous) 微分方程式之一解，則此微分方程式可能是：

   (A) $y''-2py'+q^2y=0$ (B) $y''-2pqy'+q^2y=0$

   (C) $y''-2pqy'+(p^2+q^2)y=0$ (D) $y''-2py'+(p^2+q^2)y=0$

   《喻超凡, 喻超弘 98地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (D)；因 ODE 具有 $y_1=e^{px}\cos qx$ 的齊次解，故 ODE 的特性方程式的根為 $m=p\pm qi$，則 ODE 的特性方程式為

$$m^2-2pm+(p^2+q^2)=0$$

即 ODE 爲

$$y'' - 2py' + (p^2 + q^2)y = 0$$

3. 試求 $2xyy' = y^2 - x^2$ 之解，其中 c 爲任意實數。

(A) $x^2 + y^2 = c$　(B) $x/y + y/x = c$　(C) $y^2/x + x = c$　(D) $x^2/y + y = c$

《**喻超凡**，**喻超弘** 98地方特考電力、電子工程》

《**解**》☞ (C)；原式可改寫成

$$2xyy' - y^2 = -x^2$$

令 $u = y^2$，故 $\dfrac{du}{dx} = 2yy'$ 代回 ODE 中可得

$$x\frac{du}{dx} - u = -x^2 \ \Rightarrow\ \frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x$$

積分因子爲

$$I = \exp\{\int -\frac{1}{x}\,dx\} = \exp\{-\ln|x|\} = \frac{1}{x}$$

故

$$Iu = \int \frac{1}{x}(-x)\,dx = -x + c$$

故

$$\frac{1}{x}y^2 = -x + c$$

4. 有一個位置向量函數 $\vec{F} = \sin^2 x\,\vec{i} - y\sin 2x\,\vec{j} + 5z\,\vec{k}$，計算 $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$ 之值，其中 S 爲立體 $V = \{(x\,,\,y\,,\,z) : |x| \le 1, |y| \le 1, |z| \le 1\}$ 的表面。

(A) 10　(B) 20　(C) 30　(D) 40

《**喻超凡**，**喻超弘** 98地方特考電力、電子工程》

11. 下列敘述何者正確？

(A) 如果矩陣 B、C 皆屬於 $\mathbb{R}^{n\times n}$，並且對於所有 $x\in\mathbb{R}^n$, $Bx=Cx$ 皆成立，則 B 不一定要等於 C

(B) 如果矩陣 A 屬於 $\mathbb{R}^{n\times n}$，並且對於所有 $x\in\mathbb{R}^n$，$Ax=0$ 皆成立, 則 A 不一定等於零矩陣

(C) 如果矩陣 A 爲對稱 (symmetric) 且非奇異 (nonsingular)，則 A^{-1} 也是對稱矩陣

(D) 一個線性系統如果方程式的個數小於變數的數目時， 則此系統會有無窮多 (infinite) 解 《喻超凡, 喻超弘 98地方特考電力、電子工程 》

《解》 ☞ (C)；因 A 爲對稱矩陣，故 $A^T=A$，則

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$$

故 A^{-1} 爲對稱矩陣。

12. 定義函數 $f(t)$ 的傅利葉轉換 (Fourier transform) 爲 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$，其中 $i=\sqrt{-1}$。定義脈衝函數 $\delta(t)$ 如下: $t\neq 0$ 時 $\boxed{\delta(t)=0;}$ 同時 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$。求 $\delta(t)$ 的傅利葉轉換爲何?

(A) $\omega\delta(\omega)$ (B) $\delta(\omega)$ (C) $\dfrac{\delta(\omega)}{\omega}$ (D) 1

《喻超凡, 喻超弘 98地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (D)；

$$\mathscr{F}\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,e^{-i\omega t}\,dt=1$$

15. $i=\sqrt{-1}$，有關數列(sequence) $\{\frac{e^{n\pi i/4}}{n}\}$ 敘述，下列何者正確？

(A) 有界，收斂 (B) 無界, 發散 (C) 有界, 發散 (D) 無界, 收斂

《喻超凡, 喻超弘 98地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (A)；因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n\pi i/4}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})=0$$

故數列 $\{\frac{e^{n\pi i/4}}{n}\}$ 有界且收斂。

16. 假設 c 是個複數 (complex number)，也是常數 (constant)，並且函數 $f(z)$ 的導數 $\frac{d}{dz}f(z)\triangleq f'(z)$ 存在, 則 $\frac{d}{dz}\{c^{f(z)}\}=?$

(A) $cf'(z)\log[f(z)]$ (B) $f'(z)c^{f(z)}$ (C) $f'(z)c^{f(z)}\log(c)$ (D) $c^{f(z)}f'(z)\log[f(z)]$

《喻超凡, 喻超弘 98地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (C)；

$$\frac{d}{dz}\{c^{f(z)}\}=c^{f(z)}(\log c)\,\frac{df}{dz}$$

17. 求解 $\oint_C\frac{-z-4-i3}{(z+i)(z-2)}dz$，其中 C 表示 $|z|=5$ 的圓 (circle) 且逆時鐘方向 (counterclockwise)。

(A) $i4\pi$ (B) $-i2\pi$ (C) $i10\pi$ (D) 0

《喻超凡, 喻超弘 98地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (B)；令 $f(z)=\dfrac{-z-4-i3}{(z+i)(z-2)}$，則 $f(z)$ 在 C 內具有 $z=-i$ 及 $z=2$ 的一階 poles, 且

$$\text{Res}f(-i)=\left.\frac{-z-4-i3}{(z-2)}\right|_{z=-i}=\frac{i-4-3i}{-i-2}=2$$

$$\boxed{\text{Res}f(2)}=\left.\frac{-z-4-i3}{(z+i)}\right|_{z=2}=\frac{-2-4-3i}{2+i}=-3$$

故

$$\oint_C\frac{-z-4-i3}{(z+i)(z-2)}dz=2\pi\, i\{\text{Res}f(-i)+\text{Res}f(2)\}=2\pi\, i\{2-3\}=-2\pi\, i$$

18. 利用變換變數 $v=x$，$z=2x-y$ 可將偏微分方程式 $u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}=0$ 轉換爲: (其中 $u_{xx}\triangleq\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$)

(A) $u_{vv}=0$ (B) $u_{zz}=0$ (C) $u_{vz}=0$ (D) $u_{vv}+u_{zz}=0$

《喻超凡, 喻超弘 98地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (A)；

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial v}+2\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=(\frac{\partial}{\partial v}+2\frac{\partial}{\partial z})(\frac{\partial}{\partial v}+2\frac{\partial}{\partial z})=\frac{\partial^2}{\partial v^2}+4\frac{\partial^2}{\partial v\partial z}+4\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=(-\frac{\partial}{\partial z})(-\frac{\partial}{\partial z})=\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=(\frac{\partial}{\partial v}+2\frac{\partial}{\partial z})(-\frac{\partial}{\partial z})=-\frac{\partial^2}{\partial v\partial z}-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

故

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\=&\{\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}+4\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\}+4\{-\frac{\partial^2 u}{\partial v\partial z}-2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\}+4\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\=&\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}=0\end{aligned}$$

1. 99年公務人員電力、電子、醫學工程高考

甲、申論題部分 (50分)

1. 試利用拉氏轉換 (Laplace transformation) 求解：(15分)

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ \frac{5}{2} & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

(其中 $x_i' = \dfrac{dx_i}{dt}$, $i = 1$, 2)

《**喻超凡**, **喻超弘** 99電力、電子、醫工高考》

《**解**》☞ 原式可改寫成

$$\begin{cases} x_1' + 10x_2 = 0 \\ x_2' - \dfrac{5}{2}x_1 + 10x_2 = -1 \end{cases}$$

對上式兩端取 L–T , 可得

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) + 10X_2(s) = 0 \\ sX_2(s) - x_2(0) - \dfrac{5}{2}X_1(s) + 10X_2(s) = -\dfrac{1}{s} \end{cases}$$

其中 $\mathscr{L}\{x_1(t)\} = X_1(s)$ 、$\mathscr{L}\{x_2(t)\} = X_2(s)$, 整理可得

$$\begin{cases} sX_1(s) + 10X_2(s) \boxed{= \dfrac{2}{5}} \\ -\dfrac{5}{2}X_1(s) + (s+10)X_2 = -\dfrac{1}{s} \boxed{+ \dfrac{2}{5}} \end{cases}$$

故

$$\boxed{\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{2(s^2+25)}{5s(s+5)^2} = \frac{2}{5s} - \frac{4}{(s+5)^2} \\ X_2(s) &= \frac{2s}{5(s+5)^2} = -\frac{2}{(s+5)^2} + \frac{2}{5(s+5)} \end{aligned}}$$

故

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{X_1(s)\} = \frac{2}{5} - 4te^{-5t} \\ x_2(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{X_2(s)\} = -2t\,e^{-5t} + \frac{2}{5}e^{-5t} \end{aligned}}$$

2. 設曲線 C 之參數表示式為 $x = \sqrt{3}\,t$, $y = \sin t$, $z = \cos t$, 求自 $(0\,,\,0\,,\,1)$ 到 $\boxed{(\sqrt{3}\,\pi\,,\,0\,,\,-1)}$ 之線積分 $\int_C (x^2 + yz)\,ds$ 。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 99電力、電子、醫工高考》

《解》☞ 因 C 的參數為 $x = \sqrt{3}\,t$, $y = \sin t$, $z = \cos t$, 故點 $(0\,,\,0\,,\,1)$ 時 $t = 0$ 、點 $\boxed{(\sqrt{3}\,\pi\,,\,0\,,\,-1)}$ 時 $t = \pi$, 且

$$ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\,dt = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\cos t)^2 + (-\sin t)^2}\;dt = 2\;dt$$

則

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + yz)\,ds &= \int_{t=0}^{t=\pi} \{(\sqrt{3}\;t)^2 + \sin t\;\cos t\,\}\,2\;dt \\ &= 2(t^3 + \frac{1}{2}\sin^2 t)\Big|_{t=0}^{t=\pi} \\ &= 2\pi^3 \end{aligned}$$

3. 令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

(1) 求矩陣 X 使得 $D = X^{-1}AX$ 為一對角矩陣 (diagonal matrix)。(7分)

(2) 求 $A^{100} + 2A^{101}$ 。(8分) 《喻超凡, 喻超弘 99電力、電子、醫工高考》

《解》☞

乙、測驗題部分 (50分)

1. 試問 $\int_0^{\infty} \frac{\sin 3t}{t}\, dt$ 之解為何？

(A) 0　(B) $\frac{\pi}{6}$　(C) $\frac{\pi}{3}$　(D) $\frac{\pi}{2}$

《**喻超凡**, **喻超弘** 99電力、電子、醫工高考》

《**解**》☞ (D)；

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\sin 3t}{t}\, dt &= \int_0^{\infty} \frac{\sin 3t}{t} e^{-st}\, dt\Big|_{s=0} = \mathscr{L}\{\frac{\sin 3t}{t}\}\Big|_{s=0} \\ &= \int_{s=0}^{\infty} \frac{3}{s^2+3^2}\, ds = \tan^{-1}\frac{s}{3}\Big|_{s=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

2. 下列何者為微分方程式 $y'' + 4y = 8x^2$ 的一般解？以下選項中的 A、B 為任意常數。

(A) $y = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x^2$　(B) $y = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x^2 - 1$

(C) $y = A\cos 2x + B\sin 2x + 4x^2$　(D) $y = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x^2 - 4$

《**喻超凡**, **喻超弘** 99電力、電子、醫工高考》

《**解**》☞ (B)；齊次解：令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; m = \pm 2i$$

故

$$y_h(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$$

特解

$$y_p(x) = \boxed{\frac{1}{D^2+4}} 8x^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{D^2}{4}}(8x^2) = \frac{1}{4}(1 - \frac{D^2}{4} + \cdots)(8x^2) = 2x^2 - 1$$

4. 設微分方程式 $y''+ay'+by=0$，$y(0)=y_0$，$y'(0)=y_0'$ 的解 $y(t)$ 的拉氏轉換為 $Y(s)=\dfrac{3}{s^2-4}$，試求 a、b、y_0、y_0' 之值，並判定下列何者正確？
(A) $a+b+y_0+y_0'=0$　(B) $a+b+y_0+y_0'=-1$
(C) $a+b+y_0+y_0'=-2$　(D) $a+b+y_0+y_0'=-3$
《喻超凡, 喻超弘 99電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (B)；對 ODE 兩端取 L–T，可得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+a\{sY(s)-y(0)\}+bY(s)=0$$

其中 $\boxed{\mathscr{L}\{y(t)\}=Y(s)}$，故

$$Y(s)=\frac{sy_0}{s^2+as+b}+\frac{\boxed{y_0'+ay_0}}{s^2+as+b}=\frac{3}{s^2-4}$$

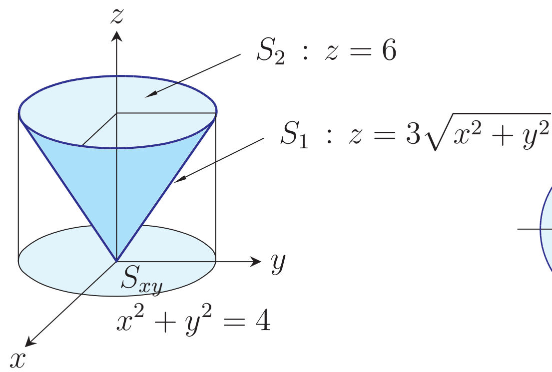
故 $a=0$、$b=-4$、$y_0=0$、$y_0'=3$，則

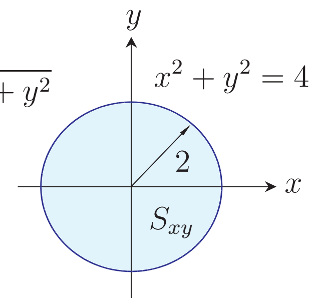
$$a+b+y_0+y_0'=0-4+0+3=-1$$

5. 對於此微分方程式 $x^2y''-3xy'+3y=2x^4e^x$，下列何者錯誤？
(A) 其解含有 x^3 項　(B) 其解含有 $x\,e^x$ 項　(C) 其解含有 x^2e^x 項
(D) 其解含有 x^2e^{2x} 項　《喻超凡, 喻超弘 99電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D)；因 ODE 的非齊次項為 $2x^4e^x$，故 ODE 不可能有 x^2e^{2x} 的特解。

6. 複變函數 $f(z)=\dfrac{1-z^2}{\cos\frac{z}{2}}$ 在 $z=\pi$ 的留數 (residue) 為何？其中 $i=\sqrt{-1}$
(A) π^2-1　(B) $2(\pi^2-1)$　(C) $i-\pi^2$　(D) $2(i-\pi^2)$
《喻超凡, 喻超弘 99電力、電子、醫工高考》





《解》 ☞

(1) 三重積分：令 V 投影到 xy 平面上的區域爲 S_{xy}，則 $S_{xy}\ :\ x^2+y^2=4$，故

$$\begin{aligned}
\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv &= \iiint_V 3\,dxdydz \\
&= \iint_{S_{xy}}\int_{z=3\sqrt{x^2+y^2}}^{z=6} 3\,dz\,dxdy \\
&= \iint_{S_{xy}} 3(6-3\sqrt{x^2+y^2}\ )\,dxdy \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=2} 3(6-3r)\,r\,dr\,d\theta \\
&= 24\pi
\end{aligned}$$

(2) 面積分：

(a) $S_1\ :\ z=3\sqrt{x^2+y^2}$，令

$$\phi = x^2+y^2-\frac{z^2}{9}=0$$

故 S_1 的單位法向量爲

$$\vec{n}=\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}=\frac{x\,\vec{i}+y\,\vec{j}-\frac{z}{9}\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+\frac{z^2}{81}}}$$

則

$$\vec{F}\cdot\vec{n}=(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k})\cdot\left(\frac{x\,\vec{i}+y\,\vec{j}-\frac{z}{9}\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+\frac{z^2}{81}}}\right)=\frac{x^2+y^2-\frac{z^2}{9}}{\sqrt{x^2+y^2+\frac{z^2}{81}}}=0$$

因此

$$\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=0$$

(b) S_2 : $z=6$，且 $x^2+y^2=4$，故 S_2 的單位法向量爲 $\vec{n}=\vec{k}$，因此

$$\begin{aligned}\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma &= \iint_{S_2}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot\vec{k}\,d\sigma\\ &= \iint_{S_2} z\,d\sigma=\iint_{S_2} 6\,d\sigma\\ &= 6\times\pi\times 2^2=24\pi\end{aligned}$$

(c) 故

$$\iint_{S=S_1+S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma+\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=0+24\pi$$

(3) 由 (1)、(2) 可知

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dv=\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

得証

---

3. 若 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，試求 A^{1000}。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 99鐵路電力、電子特考》

《解》☞ 由 $\det(A-\lambda I)=0$，可得 A 的特徵值爲 $\lambda=1$、1，令

$$A^{1000}=\alpha A+\beta I$$

則

$$\begin{cases}1^{1000}=\alpha+\beta\\ 1000\times 1^{999}=\alpha\end{cases}$$

可解得 $\alpha=1000$、$\beta=-999$，故

$$A^{1000}=1000\,A-999\,I=\begin{bmatrix}1&1000\\0&1\end{bmatrix}$$

---

4. 試應用留數定理 (Residue Theorem)，計算下列積分

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a\cos\theta}d\theta$$

其中 $-1<a<1$。(15分)

《喻超凡, 喻超弘 99鐵路電力、電子特考》

故

$$F_{X,Y}(-\infty\,,\,y)=0$$

14. 若一系統由兩項獨立 (independent) 運作之組件構成，在任一組件正常運作下該系統即可正常運作，已知此兩項組件正常運作之機率分別為 0.8 及 0.4，試求此系統正常運作之機率？

(A) 0.12 (B) 0.32 (C) 0.68 (D) 0.88

《喻超凡，喻超弘 99鐵路電力、電子特考》

《解》 ☞ (D)；此系統正常運作之機率為 $1-(1-0.8)\times(1-0.4)=0.88$

15. 若 $\boldsymbol{u}=(u_1\,,\,u_2)$，$\boldsymbol{v}=(v_1\,,\,v_2)$，下列函數何者可以定義為 $\mathbb{R}^2$ 上之一種內積？

(A) $<\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}>=u_1v_1$ (B) $<\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}>=u_1^2v_1^2+u_2^2v_2^2$ (C) $<\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}>=u_1v_1-u_2v_2$
(D) $<\boldsymbol{u}\,,\,\boldsymbol{v}>=u_1v_1+3u_2v_2$ **《喻超凡，喻超弘** 99鐵路電力、電子特考》

《解》 ☞ (D)；滿足內積三個公理。

16. 設 A、B 及 C 為任三 $n\times n$ 矩陣，則下列敘述何者不恆真？

(A) 若 $\mathbf{rank}\,(A)=n$ 且 $AB=AC$，則 $B=C$
(B) 若 $\mathbf{rank}\,(A)=n$ 且 $AB=0$，則 $B=0$
(C) 若 $\mathbf{rank}\,(A)=\mathbf{rank}\,(B)$，則 $\mathbf{rank}\,(A^2)=\mathbf{rank}\,(B^2)$
(D) $\mathbf{rank}\,(A)=\mathbf{rank}\,(A^T)$ **《喻超凡，喻超弘** 99鐵路電力、電子特考》

《解》 ☞ (C)；例子為 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，故 $A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$、$B^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，則

$$\mathbf{rank}\,(A)=\mathbf{rank}\,(B)=1 \text{ 但 } \mathbf{rank}\,(A^2)=1\neq\mathbf{rank}\,(B^2)=0$$

17. 若 S 為 $[1\quad 2\quad 1\quad 0]$, $[0\quad 0\quad 0\quad 1]$ 所生成之子空間 , 求 $\mathbb{R}^4$ 上 S 之正交補集 (Orthogonal Complement) :
(A) 由 $[-2\quad 1\quad 0\quad 0]$, $[-1\quad -1\quad 1\quad 0]$ 所生成之子空間
(B) 由 $[-2\quad 1\quad 0\quad 0]$, $[-1\quad 0\quad 1\quad 0]$ 所生成之子空間
(C) 由 $[-2\quad 1\quad 0\quad 0]$, $[-1\quad -1\quad 1\quad 1]$ 所生成之子空間
(D) 由 $[-2\quad 1\quad 1\quad 0]$, $[-1\quad -1\quad 1\quad 0]$ 所生成之子空間
《喻超凡, 喻超弘 99鐵路電力、電子特考》

《解》 ☞ (B) ; 令

$$\boxed{S} = \textbf{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

若 $\boldsymbol{x} \in \boxed{S^\perp}$ 則

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

故

$$\boldsymbol{x} = c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

18. 若矩陣 $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\3 & 2 & 5\\a & 0 & 8\end{bmatrix}$, 則下列何者正確 ?
(A) 假如 $a = 8$ 則 $\textbf{rank}\,(A) = 2$, rank 為矩陣的秩數
(B) 假如 $a = 8$ 則 $\textbf{rank}\,(A) = 3$, rank 為矩陣的秩數
(C) 假如 $a = 1$ 則 $\textbf{rank}\,(A) = 2$, rank 為矩陣的秩數
(D) 假如 $a = 3$ 則 $\textbf{rank}\,(A) = 2$, rank 為矩陣的秩數
《喻超凡, 喻超弘 99鐵路電力、電子特考》

$$\mathrm{Res}f(\sqrt{2}\,i) = \frac{z^2}{2z(z^2+1)}\Big|_{z=\sqrt{2}\,i} = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}$$

故

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}dx &= 2\pi i\{\mathrm{Res}f(i)+\mathrm{Res}f(\sqrt{2}\,i)\}\\ &= 2\pi i(-\frac{1}{2i}+\frac{1}{\sqrt{2}\,i})\\ &= 2\pi(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}})\end{aligned}$$

4. 二維連續隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 爲

$$f_{X,Y}(x\,,\,y) = \frac{1}{18\pi}\exp(\frac{-x^2-y^2+4x-4y-8}{18})\ ,\quad -\infty < x < \infty\,,\,-\infty < y < \infty$$

定義隨機變數 W 爲 $W = 3X - 2Y$。

(1) 求 X 與 Y 的邊際機率密度函數 (marginal probability density function) $f_X(x)$ 與 $f_Y(y)$。(10 分)
(2) 求 W 的期望值 (Expected value)。(5分)

《喻超凡, 喻超弘 99安全局電子組》

《解》☞

(1)

$$\begin{aligned}f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x\,,\,y)\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{18\pi}\exp\{\frac{-x^2-y^2+4x-4y-8}{18}\}\,dy\\ &= \frac{1}{18\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\frac{1}{18}(x-2)^2\}\ \exp\{-\frac{1}{18}(y+2)^2\}\,dy\\ &= \frac{1}{18\pi}\exp\{-\frac{1}{18}(x-2)^2\}\times\boxed{\sqrt{18\pi}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{18\pi}}\exp\{-\frac{1}{18}(x-2)^2\}\quad(-\infty < x < \infty)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x\,,\,y)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{18\pi}\exp\{\frac{-x^2-y^2+4x-4y-8}{18}\}\,dx \\
&= \frac{1}{18\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{1}{18}(x-2)^2\}\ \exp\{-\frac{1}{18}(y+2)^2\}\,dx \\
&= \frac{1}{18\pi}\exp\{-\frac{1}{18}(y+2)^2\}\boxed{\times\sqrt{18\pi}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{18\pi}}\exp\{-\frac{1}{18}(y+2)^2\} \quad (-\infty<y<\infty)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
E[X-2] &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-2)\,f_X(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(x-2)\,\frac{1}{\sqrt{18\pi}}\exp\{-\frac{1}{18}(x-2)^2\}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} t\,\frac{1}{\sqrt{18\pi}}\exp\{-\frac{1}{18}t^2\}\,dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[Y+2] &= \int_{-\infty}^{\infty}(y+2)\,f_Y(y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(y+2)\,\frac{1}{\sqrt{18\pi}}\exp\{-\frac{1}{18}(y+2)^2\}\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u\,\frac{1}{\sqrt{18\pi}}\exp\{-\frac{1}{18}\,u^2\}\,du \\
&= 0
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
E[W] &= E[3X-2Y] \\
&= E[3(X-2)-2(Y+2)+10] \\
&= 3E[X-2]-2E[Y+2]+10 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

6. 99年電機技師高等考試

1. 求連續隨機產生兩個5，平均需多少個數目？(20分)

《喻超凡, 喻超弘 99電機技師》

《解》☞ 設產生一個 5 的機率為 p，令隨機變數 X_1 為產生一個 5 所需數的數目，則 $X_1 \sim Geo(p)$，且 $E[X_1]=\dfrac{1}{p}$，再令隨機變數 X_2 為連續產生兩個5所需數的數目, 則

$$P(X_2 = X_1+1 \mid X_1) = p$$

$$P(X_2 = X_1+1+\widetilde{X}_2 \mid X_1) = 1-p$$

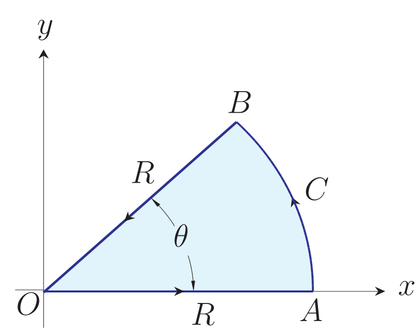
其中 $\widetilde{X}_2 \overset{d}{=} X_2$，故 X_2 的期望值為

$$\begin{aligned} E[X_2] &= E[E[X_2 \mid X_1]] = E[(X_1+1)p + (X_1+1+\widetilde{X}_2)(1-p)] \\ &= 1+E[X_1]+(1-p)E[X_2] \end{aligned}$$

整理可得 $E[X_2] = \dfrac{1}{p}(1+E[X_1]) = \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}$

2. (20分) 用複變理論 (complex variable theory) 計算下面之實數定積分 (real definite integral)：$\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$

《喻超凡, 喻超弘 99電機技師》



《解》☞ 考慮一圍線 C (如圖) 的積分，因 e^{iz^2} 在 C 內為可解析函數，故

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C e^{iz^2}dz = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{OA} e^{iz^2}dz + \int_{AB} e^{iz^2}dz + \int_{BO} e^{iz^2}dz\right] = 0 \qquad (1)$$

8. 99年調查局調查人員電子科學組特考

1. 試解下列微分方程式在 $t > 0$ 的完全解：(15分)

$$\frac{dy}{dt} + 26y = u(t)\ ,\ u(t) = \begin{cases} 6\cos(15t) & ,\ t \le 0 \\ 12\cos(15t) & ,\ t > 0 \end{cases}$$

《**喻超凡, 喻超弘** 99調查局電子科學》

《**解**》☞ $t > 0$ 時，ODE 爲

$$\frac{dy}{dt} + 26y = 12\cos 15t$$

則積分因子爲

$$I(t) = e^{\int 26\,dt} = e^{26t}$$

故

$$Iy = \int e^{26t}\,\boxed{12\cos 15t}\,dt = \frac{12}{901}e^{26t}(26\cos 15t + 15\sin 15t) + c$$

則

$$y(x) = \frac{12}{901}(26\cos 15t + 15\sin 15t) + c\ e^{-26t}$$

2. 試解下列微分方程式的完全解:(10分)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0$$

其中 $\lambda > 0$，$y(-L) = y(L)$，$\frac{dy}{dx}(-L) = \frac{dy}{dx}(L)$

《**喻超凡, 喻超弘** 99調查局電子科學》

《**解**》☞ 因

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \quad (\lambda > 0)$$

可解得

$$a = \frac{1}{4}e^{2t}(-1+e^{2t}-2t)\ ,\ b = e^{2t}-e^{4t}+3e^{2t}t\ ,\ c = e^{4t}-4e^{2t}t$$

4. 令 $f(x)=e^{-a|x|}$，$-1 \le x \le 1$，$a>0$。試求 $f(x)$ 之 Fourier cosine integral。(15分) 《喻超凡, 喻超弘 99 調查局電子科學》

《解》☞ $f(x)$ 之 Fourier cosine integral 爲

$$f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos wx\, dw$$

其中

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos wx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 e^{-ax}\cos wx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{a^2+w^2}(-ae^{-ax}\cos wx + we^{-ax}\sin wx)\Big|_0^1 \\ &= \frac{2e^{-a}(ae^a - a\cos w + w\sin w)}{\pi(a^2+w^2)} \end{aligned}$$

5. 若 z 爲複數 (complex variable)，試計算積分 $\oint_C f(z)dz$，其中 C 爲圓 $|z|=2$，$f(z)=\tan(z)$。(15分) 《喻超凡, 喻超弘 99 調查局電子科學》

《解》☞ 因 $f(z)=\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$，則 $f(z)$ 在 C 內具有 $z=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 的一階 poles，且

$$\mathrm{Res} f(\frac{\pi}{2}) \boxed{= -1}\ ,\ \mathrm{Res} f(-\frac{\pi}{2}) \boxed{= -1}$$

故

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i\{\mathrm{Res} f(\frac{\pi}{2}) + \mathrm{Res} f(-\frac{\pi}{2})\} \boxed{= -4\pi i}$$

1. 100年公務人員電力、電子、醫學工程高考

甲、申論題部分 (50分)

1. 令 $f(t)=\begin{cases}0 & ,\ t<3\\ t+1 & ,\ t\geq 3\end{cases}$，試求 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform)。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》☞ 因

$$f(t)=\begin{cases}0 & ,\ t<3\\ t+1 & ,\ t\geq 3\end{cases}=(t+1)H(t-3)$$

故

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\mathscr{L}\{(t+1)H(t-3)\}=e^{-3s}\mathscr{L}\{t+3+1\}=e^{-3s}(\frac{1}{s^2}+\frac{4}{s})$$

2. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，
   (1) 求 A 的特徵值 (eigenvalues)。(5分)
   (2) 求 A 的特徵向量 (eigenvectors)。(5分)
   (3) 求 A^{100}。(5分)

《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》☞

(1) 由 $\det(A-\lambda I)=0$，可得特徵值爲 $\lambda=6$、2。

(2) 將 $\lambda=6$ 代回 $(A-\lambda I)X=0$ 中可得

$$\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

可得對應的特徵向量爲

$$X=c_1\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}\quad (c_1\neq 0)$$

(2) 特解：

$$
\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{(D-1)(D-2)(D-3)} te^{4t} \\
&= e^{4t} \frac{1}{(D+3)(D+2)(D+1)} t \\
&= e^{4t} \left(\frac{1}{6} - \frac{11}{36} D + \cdots\right) t \\
&= e^{4t}\left(\frac{1}{6}t - \frac{11}{36}\right) = x^4\left(\frac{1}{6}\ln x - \frac{11}{36}\right)
\end{aligned}
$$

(3) 通解：$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

---

4. (10分) 設 $\vec{v} = xy\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + zy\,\vec{k}$ 及 $A = (0\,,1\,,0)$、$B = (2\,,0\,,1)$、$D = (3\,,2\,,1)$ 等三點, 若 C 爲由 A 到 B 及 B 到 D 兩直線線段所組成。求

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_C (xy\,dx - 4\,dy + zy\,dz) = ?$$

《**喻超凡, 喻超弘** 100電力、電子、醫工高考》

《**解**》☞ 令 $C = C_1 + C_2$, 其中 C_1 爲 AB 的直線 , C_2 爲 BD 的直線 。

(a) C_1 的參數式爲

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad ; \ t = 0 \sim 1$$

故

$$\int_{C_1} (xy\,dx - 4\,dy + zy\,dz) = \int_{t=0}^{t=1} 2t(1-t)\,2dt - 4\,d(-t) + t\,(1-t)\,dt = \frac{29}{6}$$

(b) C_2 的參數式爲

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases} \quad ; \ t = 0 \sim 1$$

故

$$\int_{C_2} (xy\,dx - 4\,dy + zy\,dz) = \int_{t=0}^{t=1} (2+t)(2t)\,dt - 4 \times 2dt = -\frac{16}{3}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
&\int_{C=C_1+C_2} (xy\,dx - 4\,dy + zy\,dz) \\
&= \int_{C_1} (xy\,dx - 4\,dy + zy\,dz) + \int_{C_2} (xy\,dx - 4\,dy + zy\,dz) \\
&= \frac{29}{6} - \frac{16}{3} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2. 設 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 是微分方程式 A : $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的解，而 $y_3(x)$ 及 $y_4(x)$ 是微分方程式 B : $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ 的解，則下列敘述何者錯誤?(題中 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$ 爲 x 的函數，且 $r(x) \neq 0$)
(A) $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 必定也是微分方程式 A 的解 (其中 c_1 及 c_2 爲任意常數)
(B) $y_3(x) - y_4(x)$ 必定也是微分方程式 A 的解
(C) $y_3(x) + y_4(x)$ 必定也是微分方程式 B 的解
(D) $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_3(x)$ 必定也是微分方程式 B 的解
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞ (C)；非齊次方程式的解相加, 不是原方程式的解。

3. 假設函數 $F(s) = \dfrac{4s^2+2}{s^3+3s^2+2s}$ 之逆拉氏轉換 (inverse Laplace transform) 爲 $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = a + b\,e^{-t} + c\,e^{-2t}$，其中 a、b、c 爲常數，求 $a+b+c$？
(A) -3 (B) 2 (C) 3 (D) 4
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞ (D)

$$F(s) = \frac{4s^2+2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{6}{s+1} + \frac{9}{s+2}$$

故

$$a+b+c = 1-6+9 = 4$$

4. 求複數函數積分 $\int_C \boxed{e^{z+i}\,dz}$ 之值，其中積分路徑 C 的參數式爲 $\boxed{z(t)} = 2e^{i2t}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$，
(A) $(e^{-2} - e^2)(\cos 1 + i\,\sin 1)$ (B) $(e^{-2} + e^2)(\cos 1 + i\,\sin 1)$
(C) $(e^{-2} - e^2)(\cos 1 - i\,\sin 1)$ (D) $(e^{-2} + e^2)(\cos 1 - i\,\sin 1)$
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (A) , $t=0$ 時 $\boxed{z=2}$, $t=\dfrac{\pi}{2}$ 時 $\boxed{z=2e}^{\pi i}=-2$, 故

$$\boxed{\int_C e^{z+i}\,dz=\int_2^{-2} e^{z+i}\,dz=e^i\,e^z\Big|_{z=2}^{-2}}=(e^{-2}-e^{2})(\cos 1+i\,\sin 1)$$

5. 解微分方程式 $y'-3y=-6y^2,\ y(0)=-1$ (其中 $y'=\dfrac{dy}{dx}$) :
(A) $y=1/(2-3e^{3x})$　(B) $y=1/(2-3e^{-3x})$
(C) $y=1/(1-2e^{3x})$　(D) $y=1/(1-2e^{-3x})$
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (B) , 原式可改寫成

$$\boxed{y^{-2}y'}-3y^{-1}=-6$$

令 $u=y^{-1}$, 故 $\dfrac{du}{dx}=-y^{-2}y'$, 代回上式可得

$$\frac{du}{dx}+3u=6$$

積分因子為 $I=e^{3x}$, 故

$$I\,u(x)=\int 6\,e^{3x}\,dx=2e^{3x}+c$$

則

$$u(x)=y^{-1}(x)=2+c\,e^{-3x}$$

再由

$$y(0)=-1=\frac{1}{2+c}\ \Rightarrow\ c=-3$$

故

$$y(x)=\frac{1}{2-3e^{-3x}}$$

6. 試求向量場 $\vec{v}=\sinh(x-z)\vec{i}+2y\vec{j}+(z-y^2)\vec{k}$ 的散度 (divergence) :
(A) $\cosh(x-z)+3$　(B) $\cosh(x-z)+4$　(C) $\cosh x+3$　(D) $\cosh x+2+z$
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞ (A)

$$div(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = \cosh(x-z) + 2 + 1 = \cosh(x-z) + 3$$

7. $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$、$\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ 爲兩個三維向量 , 以下那一個是 $\vec{u} \times \vec{v}$?
(A) 向量 $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ (B) 純量 3 (C) 純量 1 (D) 向量 $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞ (D)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

8. 複變函數 $f(z) = \dfrac{4i}{z^2+4}$ 以 $2i$ 爲中心展開的羅倫級數 (Laurent series) 爲何 ? 其中 $i = \sqrt{-1}$ 。
(A) $\dfrac{1}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty} (\dfrac{i}{4})^{n+1}(z-2i)^n$ (B) $-\dfrac{1}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty} (\dfrac{i}{4})^{n+1}(z-2i)^n$
(C) $\dfrac{1}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty} (\dfrac{i}{4})^{n}(z-2i)^n$ (D) $-\dfrac{1}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty} (\dfrac{i}{4})^{n}(z-2i)^n$
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞ (A) , 令 $u = z - 2i$, 故

$$\begin{aligned}
\frac{4i}{z^2+4} &= \frac{4i}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{4i}{u(u+4i)} \\
&= \frac{1}{u} - \frac{1}{u+4i} = \frac{1}{u} - \frac{1}{4i}\frac{1}{1+\frac{u}{4i}} \\
&= \frac{1}{u} - \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{u}{4i})^n = \frac{1}{u} + \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{4i})^{n+1}\ u^n \\
&= \frac{1}{z-2i} + \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{i}{4})^{n+1}(z-2i)^n
\end{aligned}$$

15. 給定一個常態分佈 (Normal Distribution) 的隨機變數 X，它的期望值 (mean) 爲 0，變異值 (variance) 爲 5。已知 $P(X > C) = 0.05$, 也就是 X 大於 C 的機率爲 0.05。求 $P(-C < X < C)$ 之值爲何？
(A) 0.90 (B) 0.95 (C) 0.975 (D) 0.995
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (A)，因 $\mu = 0$，故 X 的圖形爲對稱 y 軸，則

$$P(-C < X < C) = \boxed{2P(0 < X < C)} = 2\{\frac{1}{2} - P(X > C)\} = 2(\frac{1}{2} - 0.05) = 0.9$$

16. 若 X 爲一連續隨機變數 (continuous random variable)，其機率密度函數 (probability density function) 爲

$$f_X(x) = \begin{cases} kx(1-x) & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

試求 $k = ?$
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》☞ (D)

$$\int_0^1 f_X(x)\,dx = \int_0^1 kx(1-x)\,dx = k(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = k \times \frac{1}{6} = 1$$

故 $k = 6$

17. 求 $\lim\limits_{\boxed{z \to 2e^{\pi i/3}}} \dfrac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$ 之值爲何？
(A) $\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$ (B) $\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$ (C) $\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$ (D) $\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞ (A)

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 2e^{\pi i/3}}\frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16} &= \lim_{z\to 2e^{\pi i/3}}\frac{3z^2}{4z^3+8z}=\lim_{z\to 2e^{\pi i/3}}\frac{3z}{4z^2+8}\\ &= \frac{3\times 2e^{\pi i/3}}{4\times(2e^{\pi i/3})^2+8}=\frac{3\times 2\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}{16(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+8}\\ &= \frac{3(1+\sqrt{3}\,i)}{8\sqrt{3}\,i}=\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}i\end{aligned}$$

18. 請計算 $\dfrac{2^{12}}{(1-i)^{20}}$ 之值，其中 $i=\sqrt{-1}$。
(A) $-4+4i$ (B) $4i$ (C) -4 (D) 4
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞ (C)

$$\frac{2^{12}}{(1-i)^{20}}=\frac{2^{12}}{(\sqrt{2}\,\boxed{e^{-\pi i/4})}^{20}}=\frac{2^{12}}{2^{10}}\boxed{e^{5\pi i}}=-4$$

19. 若 $\psi(x\,,\,y\,,\,z)=xy-yz+xyz$，則其在點 $P=(0\,,\,-1\,,\,1)$ 之最大改變率 (rate of charge) 之值為何？
(A) -2 (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞ (D)

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k}=(y+yz)\,\vec{i}+(x-z-xz)\,\vec{j}+(-y+xy)\,\vec{k}$$

故

$$\nabla\psi(0\,,\,-1\,,\,1)=-2\,\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

最大改變率 $|\nabla\psi(0\,,\,-1\,,\,1)|=\sqrt{6}$

《解》 ☞ (A)

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 2e^{\pi i/3}}\frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16} &= \lim_{z\to 2e^{\pi i/3}}\frac{3z^2}{4z^3+8z}=\lim_{z\to 2e^{\pi i/3}}\frac{3z}{4z^2+8}\\ &= \frac{3\times 2e^{\pi i/3}}{4\times(2e^{\pi i/3})^2+8}=\frac{3\times 2\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}{16(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+8}\\ &= \frac{3(1+\sqrt{3}\,i)}{8\sqrt{3}\,i}=\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}i\end{aligned}$$

18. 請計算 $\dfrac{2^{12}}{(1-i)^{20}}$ 之值，其中 $i=\sqrt{-1}$ 。
(A) $-4+4i$ (B) $4i$ (C) -4 (D) 4
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞ (C)

$$\frac{2^{12}}{(1-i)^{20}}=\frac{2^{12}}{(\sqrt{2}\ e^{\pi i/4})^{20}}=\frac{2^{12}}{2^{10}}e^{-5\pi i}=-4$$

19. 若 $\psi(x\,,\,y\,,\,z)=xy-yz+xyz$，則其在點 $P=(0\,,\,-1\,,\,1)$ 之最大改變率 (rate of charge) 之值爲何？
(A) -2 (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$
《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子、醫工高考》

《解》 ☞ (D)

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k}=(y+yz)\vec{i}+(x-z-xz)\vec{j}+(-y+xy)\vec{k}$$

故

$$\nabla\psi(0\,,\,-1\,,\,1)=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

最大改變率 $|\nabla\psi(0\,,\,-1\,,\,1)|=\sqrt{6}$

《解》 ☞ (B)；方程式可改寫成

$$y'' + y' - \frac{2}{x^2}\,y = 0$$

故 $P(x) = 1$、$Q(x) = -\dfrac{2}{x^2}$，則

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\,P(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\,Q(x) = \lim_{x\to 0}(-2) = -2$$

則 indicial 方程式為

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) - 2 = 0$$

15. 求 $\dfrac{d}{dz}\{z\,\tan^{-1}(\ln z)\}$

(A) $\dfrac{1}{(\ln z)^2} + \tan^{-1}(\ln z)$ (B) $\dfrac{1}{1+(\ln z)^2} + \tan^{-1}(\ln z)$

(C) $\tan^{-1}(\ln z)$ (D) $\dfrac{1}{\ln z} + \tan^{-1}(\ln z)$

《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子身障特考》

《解》 ☞ (B)；

$$\frac{d}{dz}\{z\,\tan^{-1}(\ln z)\} = \tan^{-1}(\ln z) + z\,\frac{1}{1+(\ln z)^2}\,\frac{1}{z} = \tan^{-1}(\ln z) + \frac{1}{1+(\ln z)^2}$$

16. 設 z 為複數，下列敘述何者為正確？

(A) $|e^{z^2}| \le e^{|z|^2}$ (B) $\cos(i\overline{z}) \ne \overline{\cos(iz)}$

(C) 對於複數平面任何兩點，公式 $Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$ 皆成立，其中 $Arg(z)$ 表示複數 z 的主幅解 (principal argument)

(D) 函數 $\sin\overline{z}$ 在 $z = 0$ 時為可析函數 (analytic function)

《喻超凡, 喻超弘 100電力、電子身障特考》

(1) 原點在 C 外：設 C 為簡單的封閉曲線，且其所圍的區域為 D，同時

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \{\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\}\ \vec{k} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

因 $\vec{F}$ 在 D 中函數及其一階偏導為連續，故 $\vec{F}$ 為保守場，則

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R}=0$$

(2) 原點在 C 內：令

$$C\ :\ \begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}\ ;\ \theta=0\sim 2\pi$$

故

$$
\begin{aligned}
\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{R} &= \oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{-\rho(\theta)\sin\theta}{\rho^2}d(\rho(\theta)\cos\theta)+\frac{\rho(\theta)\cos\theta}{\rho^2}d(\rho(\theta)\sin\theta) \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{\rho}\{-\sin\theta(\cos\theta d\rho-\rho\sin\theta d\theta)+\cos\theta(\sin\theta d\rho+\rho\cos\theta d\theta)\} \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

4. 假設隨機變數 X 的累積分布函數 (cumulative distribution function) $F(x)$ 為

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , x<1 \\ 0.25 & , 1\leq x<4 \\ 0.5 & , 4\leq x<5 \\ 0.75 & , 5\leq x<7 \\ 1 & \boxed{, 7\leq x} \end{cases}$$

(1) 試求 $P(X=5)$。(3分)
(2) 試求 $P(X>3)$。(3分)
(3) 試求 $P(2.5<X<6)$。(4分) **《喻超凡, 喻超弘**100鐵路電力、電子特考**》**

《解》 ☞

(1) $P(X=5)=F(5)-F(5^{-})=0.75-0.5=0.25$

(2) $P(X>3)=1-P(X\leq 3)=1-F(3)=1-0.25=0.75$

(3) $P(2.5<X<6)=F(6^{-})-F(2.5)=0.75-0.25=0.5$

乙、測驗題部分 (50分)

1. 若 $F(s)$ 爲 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換，$F(s)=\dfrac{0.1s+0.9}{s^2+3.24}$ 則 $f(t)$ 爲何？

(A) $f(t)=0.1+0.9t$ (B) $f(t)=0.1+0.9t\,e^{-3.24t}$
(C) $f(t)=0.1\cos 1.8t+0.9\sin 1.8t$ (D) $f(t)=0.1\cos 1.8t+0.5\sin 1.8t$

《喻超凡, 喻超弘 100鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (D)；

$$\boxed{\mathscr{L}^{-1}}\left\{\frac{0.1s+0.9}{s^2+3.24}\right\}=\boxed{\mathscr{L}^{-1}}\left\{\frac{0.1s+0.9}{s^2+(1.8)^2}\right\}=0.1\ \cos 1.8t+0.5\ \sin 1.8t$$

2. 下列何者不是正合微分方程式 (exact differential equation)？

(A) $e^{-2\theta}(r\,dr-r^2\,d\theta)=0$ (B) $2xy\,dy=(x^2+y^2)dx$
(C) $2xy\,dx+x^2dy=0$ (D) $2(\sin 2x)(\sinh y)dx-(\cos 2x)(\cosh y)\,dy=0$

《喻超凡, 喻超弘 100鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (B)；因 ODE 爲

$$(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$$

令

$$M=x^2+y^2\ ,\ \ N=-2xy$$

因

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y\neq\frac{\partial N}{\partial x}=-2y$$

故 ODE 不爲正合

5. 求解微分方程 $y' = \cosh 4x$，其解為下列何者？

(A) $y = \dfrac{\sinh 4x}{4} + c$ (B) $y = \dfrac{\tanh 4x}{4} + c$

(C) $y = \dfrac{\coth 4x}{4} + c$ (D) $y = \dfrac{\cosh 4x}{4} + c$

《**喻超凡**, **喻超弘** 100鐵路電力、電子特考》

《**解**》☞ (A)；

$$y(x) = \int \cosh 4x \; dx = \frac{\sinh 4x}{4} + c$$

6. 求解微分方程 $y'' - 4\pi y' + 4\pi^2 y = 0$，其解為下列何者？

(A) $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2\pi x}$ (B) $y = (c_1 + c_2 x)x\, e^{-2\pi x}$

(C) $y = (c_1 + c_2 x)e^{2\pi x}$ (D) $y = (c_1 + c_2 x)x\, e^{2\pi x}$

《**喻超凡**, **喻超弘** 100鐵路電力、電子特考》

《**解**》☞ (C)；令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2 - 4\pi + 4\pi^2 = 0 \;\Rightarrow\; m = 2\pi \,,\, 2\pi$$

故

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2\pi x}$$

7. 下列那一個複數函數不是可解析函數？

(A) $f(z) = \sin z$ (B) $f(z) = \cos z$ (C) $f(z) = e^{-z}$ (D) $f(z) = |z|^2$

《**喻超凡**, **喻超弘** 100鐵路電力、電子特考》

《**解**》☞ (D)；函數 f 中有 $\overline{z}$ 變數, 必不可解析，因 $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$，故不可解析。

17. 下列何者爲赫密特 (Hermitian) 矩陣？

(A) $A=\begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 0 \end{bmatrix}$ (B) $A=\begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}$ (C) $A=\begin{bmatrix} 7 & 1+i \\ \boxed{1-i} & 6 \end{bmatrix}$

(D) $A=\begin{bmatrix} i & 1+i \\ 1-i & -i \end{bmatrix}$ **《喻超凡, 喻超弘** 100鐵路電力、電子特考》

《解》 ☞ (C)；赫密特矩陣對角線元素均爲實數

18. 隨機變數 X 、Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 爲

$$f_{X,Y}(x\,,\,y)=\begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & ,\ 0\le x\le 2\ ,\ 0\le y\le 2 \\ 0 & ,\ \text{其他} \end{cases}$$

下列各期望值何者正確？

(A) $E[XY]=\frac{4}{3}$ (B) $E[Y]=\frac{5}{8}$ (C) $E[X]=\frac{5}{6}$ (D) $E[XY]=E[X]E[Y]$

《喻超凡, 喻超弘 100鐵路電力、電子特考》

《解》 ☞ (A)；

(A)

$$E[XY]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dxdy=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=2} xy\ \frac{1}{8}(x+y)\, dydx=\frac{4}{3}$$

(B)

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{X,Y}(x,y)\, dxdy=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=2} y\ \frac{1}{8}(x+y)\, dydx=\frac{7}{6}$$

(C)

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X,Y}(x,y)\, dxdy=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=2} x\ \frac{1}{8}(x+y)\, dydx=\frac{7}{6}$$

(D) $E[XY]=\frac{4}{3}\neq E[X]E[Y]=\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}$

《解》 ☞ 令

$$\phi(x\,,\,y\,,\,z)=x^2+y^2-z^2=0$$

因

$$\nabla\phi=2x\,\vec{i}+2y\,\vec{j}-2z\,\vec{k}$$

故曲面在 P_0 點處的法向量為

$$\vec{n}=\nabla\phi(P_0)=2\,\vec{i}+2\,\vec{j}-2\sqrt{2}\,\vec{j}$$

(1) 在 P_0 處的切平面為

$$2(x-1)+2(y-1)-2\sqrt{2}(z-\sqrt{2})=0$$

即

$$x+y-\sqrt{2}\,z=0$$

(2) 在 P_0 處的法線方程式為

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,t \end{cases}$$

(3) 因曲線 C 的位置向量為

$$\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+\vec{k}$$

且

$$\vec{r}\,'(t)=-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}\;\Rightarrow\;|\vec{r}\,'(t)|=1$$

$$\vec{r}\,''(t)=-\cos t\,\vec{i}-\sin t\,\vec{j}$$

故

$$\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)=\vec{k}$$

因此

$$\kappa=\frac{|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)|}{\boxed{|\vec{r}\,'(t)|^3}}=1$$

乙、測驗題部分 (50分)

1. 已知微分方程式 $y''+\alpha y'+\beta y=0$ 的通解為 $y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$，試求 α 及 β 之值，並判定下列何者正確？(題中 α、β、c_1 及 c_2 為常數)
(A) $\alpha+\beta=-11$ (B) $\alpha+\beta=11$ (C) $\alpha+\beta=-5$ (D) $\alpha+\beta=5$
《喻超凡，喻超弘100安全局電子組》

《解》☞ (B)；令 $y=e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^2+\alpha m+\beta=0$$

已知 ODE 的通解為

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$$

故 $m=-2$、-3，則

$$\alpha=-\{(-2)+(-3)\}=5\ ,\ \beta=(-2)(-3)=6$$

則 $\alpha+\beta=5+6=11$

2. 下列何者可為 $\dfrac{dy}{dx}+2xy=4x$ 之解？
(A) $y=e^{-x^2}$ (B) $y=1+e^{-x^2}$ (C) $y=2+e^{-x^2}$ (D) $y=3+e^{-x^2}$
《喻超凡，喻超弘100安全局電子組》

《解》☞ (C)；因 ODE 的特解為 $y_p(x)=2$

3. 設微分方程式 $y'+ay=0$，$y(0)=y_0$ 的級數解 (series solution) 為 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-3x)^n}{n!}$，試求常數 a 及 y_0 之值，並判定下列何者正確？
(A) $a+y_0=2$ (B) $a+y_0=3$ (C) $a+y_0=4$ (D) $a+y_0=5$
《喻超凡，喻超弘100安全局電子組》

再由 $y(0) = \dfrac{\pi}{3} = c$, 故 ODE 的解爲

$$y = \frac{\pi}{3}\,\sec x$$

6. 請找出何者爲曲線 $y = \dfrac{c}{x^2}$ 的正交曲線 ?

(A) $x^2+2y^2=k$ (B) $x^2-2y^2=k$ (C) $x^2-2y^2+x=k$ (D) $x^2-2y^2-x=k$

《**喻超凡, 喻超弘** 100地方特考電力、電子、電信工程》

《**解**》☞ (B) ; 令 $F(x\,,\,y) = yx^2 = c$, 故正交曲線滿足

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} = \frac{x^2}{2xy} = \frac{x}{2y}$$

即

$$2y\,dy = x\,dx$$

兩端積分可得

$$y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c_1 \;\Rightarrow\; x^2 - 2y^2 = k$$

7. 有一個線性轉換 $T(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3) = (2x_1+3x_2+x_3\,,\;3x_1+3x_2+x_3\,,\;2x_1+4x_2+x_3)$, 下面那一項是 $T^{-1}(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$?

(A) $(x_1+x_2\,,\;x_1+x_3\,,\;6x_1+2x_2-3x_3)$ (B) $(-x_1+x_2\,,\;-x_1+x_3\,,\;6x_1+2x_2-3x_3)$

(C) $(x_1+x_2\,,\;x_1+x_3\,,\;6x_1-2x_2-3x_3)$ (D) $(-x_1+x_2\,,\;-x_1+x_3\,,\;6x_1-2x_2-3x_3)$

《**喻超凡, 喻超弘** 100地方特考電力、電子、電信工程》

《**解**》☞ (D) ;

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x_1+3x_2+x_3 \\ 3x_1+3x_2+x_3 \\ 2x_1+4x_2+x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

令

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

《解》 ☞ (D)；實對稱矩陣必可對角化

10. 若 0 爲矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的特徵值，請問 α 爲何值？

(A) 1　(B) $\frac{3}{2}$　(C) 2　(D) $\frac{5}{2}$

《喻超凡，喻超弘 100地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 ☞ (B)；若 0 爲矩陣的特徵值，則

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 + 2\alpha = 0$$

故 $\alpha = \frac{3}{2}$

11. 兩連續隨機變數 X、Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 爲

$$f_{X,Y}(x\,,\,y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & ,\ 0 \le x \le 2\ ,\ 0 \le y \le 2 \\ 0 & ,\ \text{其他} \end{cases}$$

則協方差 (covariance) **Cov** $(X\,,\,Y) = ?$

(A) $-\frac{1}{36}$　(B) $-\frac{3}{28}$　(C) $-\frac{5}{24}$　(D) $-\frac{1}{39}$

《喻超凡，喻超弘 100地方特考電力、電子、電信工程》

《解》 ☞ (A)；

$$E[XY] = \iint_D xy\, f_{X,Y}(x\,,\,y)\, dxdy = \int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=2} xy\,\frac{1}{8}(x+y)\, dydx = \frac{4}{3}$$

$$E[X] = \iint_D x\, f_{X,Y}(x\,,\,y)\, dxdy = \int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=2} x\,\frac{1}{8}(x+y)\, dydx = \frac{7}{6}$$

$$E[Y]=\iint_D y\,f_{X,Y}(x\,,\,y)\,dxdy=\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=2} y\,\frac{1}{8}(x+y)\,dydx=\frac{7}{6}$$

故

$$\textbf{Cov}\,(X\,,\,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36}$$

12. 考慮一波式 (Poisson) 分布之離散隨機變數 (discrete random variable) X，其值為 k 之機率是 $P\{X=k\}=e^{-3}\dfrac{3^k}{k!}$，$k=0\,,\,1\,,\,2\,,\,\cdots$，試求其均值 (mean) $E[X]=?$
(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12
《喻超凡, 喻超弘 100地方特考電力、電子、電信工程》

《解》☞ (A)；

$$\begin{aligned}E[X]&=\sum_{x=0}^{\infty}xP\{X=x\}=\sum_{x=0}^{\infty}xe^{-3}\frac{3^x}{x!}\\&=e^{-3}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{3^x}{(x-1)!}=e^{-3}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{3^{x+1}}{x!}\\&=e^{-3}\times 3\times e^{3}=3\end{aligned}$$

13. 一公正的骰子被擲10次，若點數 2 出現3次之機率為 $(\dfrac{10!}{a!b!})(\dfrac{c^d}{6^{10}})$，則 $a+b+c+d=?$
(A) 15 (B) 20 (C) 21 (D) 22
《喻超凡, 喻超弘 100地方特考電力、電子、電信工程》

《解》☞ (D)

$$\text{數 2 出現3次之機率為}=C_3^{10}\,(\frac{1}{6})^3\,(\frac{5}{6})^7=\frac{10!}{7!3!}\times\frac{5^7}{6^{10}}$$

故 $a=7$、$b=3$、$c=5$、$d=7$，則

$$a+b+c+d=7+3+5+7=22$$

19. 有一曲線之參數方程式爲 $x = 10\sin t$, $y = 10\cos t$, 其中 $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, 請問該曲線弧長爲何 ?

(A) 5π (B) 10π (C) 15π (D) 20π

《**喻超凡**, **喻超弘** 100地方特考電力、電子、電信工程》

《**解**》☞ (B) ; 曲線 C 的位置向量爲

$$\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = 10\sin t\,\vec{i} + 10\cos t\,\vec{j}$$

故

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 10\cos t\,\vec{i} - 10\sin t\,\vec{j}$$

因此

$$\boxed{ds = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt} = \sqrt{(10\cos t)^2 + (10\sin t)^2}\; dt = 10\,dt$$

則曲線的弧長爲

$$s = \int_C ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 10\,dt = 10\,\pi$$

20. 有三個向量 $\vec{a} = [-1\,,\,2\,,\,0]$, $\vec{b} = [2\,,\,3\,,\,1]$, $\vec{c} = [5\,,\,-7\,,\,2]$, 求 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \boxed{\vec{c}} = ?$

(A) 11 (B) -11 (C) 10 (D) -10

《**喻超凡**, **喻超弘** 100地方特考電力、電子、電信工程》

《**解**》☞ (B) ;

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

(3) 將 $x=0$ 代回 (1) 式, 中可得

$$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos n\pi}{n^2}=f(0)=0$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{3}$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

2. (1) 若 λ 是一個非奇異 (nonsingular) 矩陣 A 的特徵值 (eigenvalue) , X 是 λ 對應的特徵向量 (eigenvector) , 請証明 $\dfrac{1}{\lambda}$ 及 X 分別是 A^{-1} 的特徵值及其對應的特徵向量 。(10分)

(2) 若 $A=\begin{bmatrix}0&0&-2\\1&2&1\\1&0&3\end{bmatrix}$, 請用其最大的特徵值証 (1) 的結果 。(5分)

《**喻超凡, 喻超弘** 101電力、電子、電信高考》

《解》 ☞

(1) 因 λ 爲矩陣 A 的特徵值 , 且對應的特徵向量爲 X , 則

$$AX=\lambda X$$

即

$$\frac{1}{\lambda}X=A^{-1}X$$

故 A^{-1} 的特徵值爲 $\dfrac{1}{\lambda}$, 且對應的特徵向量仍爲 X 。

(2) 由 $\det(A-\lambda I)=0$, 可得 A 的特徵值爲 $\lambda=2$ 、2 、1 , 將 $\lambda=2$ 代回 $(A-\lambda I)X=0$ 中可得

$$\begin{bmatrix}-2&0&-2\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\boxed{x_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

可得對應的特徵向量爲

$$X=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\quad(\,c_1\text{、}c_2\text{ 不全爲 }0)$$

因

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 0 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由 $\det(A^{-1}-\lambda I)=0$ 可得 A^{-1} 的特徵值為 $\lambda=\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$、1，將 $\lambda=\frac{1}{2}$ 代回 $(A^{-1}-\lambda I)V=0$ 中可得

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

故對應的特徵向量為

$$V=c_1\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\quad(\,c_1、c_2\text{ 不全為 }0)$$

故 $\lambda=2$ 為 A 的特徵值，則 $\lambda=\frac{1}{2}$ 為 A^{-1} 的特徵值，且對應的特徵向量均為

$$c_1\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\quad(\,c_1、c_2\text{ 不全為 }0)$$

3. (10分) 藉由考慮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ 之收斂性，証明

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \boxed{\cos n\theta} = \frac{r\cos\theta-r^2}{1-2r\,\cos\theta+r^2}\quad,\quad 0<r<1$$

《**喻超凡**，**喻超弘** 101電力、電子、電信高考》

《**解**》☞ 因

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n=\frac{z}{1-z}\quad(|z|<1)$$

故令 $z = r\,e^{i\theta}$ $(0 < r < 1)$ 代回上式, 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(r\,e^{i\theta})^n &= \sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos n\theta + i\,\sin n\theta)\\
&= \frac{r\,e^{i\theta}}{1 - r\,e^{i\theta}}\\
&= \frac{r(\cos\theta + i\,\sin\theta)}{1 - r(\cos\theta + i\,\sin\theta)}\\
&= \frac{r(\cos\theta + i\,\sin\theta)}{(1 - r\,\cos\theta) - i\,r\,\sin\theta}\\
&= \frac{r(\cos\theta + i\,\sin\theta)\{(1 - r\,\cos\theta) + i\,r\,\sin\theta\}}{(1 - r\cos\theta)^2 + r^2\,\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta &= Re\{\sum_{n=1}^{\infty}(r\,e^{i\theta})^n\}\\
&= Re\left[\frac{r(\cos\theta + i\,\sin\theta)\{(1 - r\,\cos\theta) + i\,r\,\sin\theta\}}{(1 - r\cos\theta)^2 + r^2\,\sin^2\theta}\right]\\
&= \frac{r\cos\theta(1 - r\,\cos\theta) - r^2\,\sin^2\theta}{(1 - r\cos\theta)^2 + r^2\,\sin^2\theta}\\
&= \frac{r\,\cos\theta - r^2}{1 - 2r\,\cos\theta + r^2} \quad (0 < r < 1)
\end{aligned}$$

4. 解 $(1 + x^2)\,(dy - dx) = 2xy\,dx$, 條件爲 $y(0) = 1$ 。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 101電力、電子、電信高考》

《解》 ☞ 原式可改寫成

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{1 + x^2}\,y = 1$$

爲一階線性 ODE , 積分因子爲

$$I = \exp\{\int -\frac{2x}{1 + x^2}\,dx\} = \exp\{-\ln|1 + x^2|\} = \frac{1}{1 + x^2}$$

故

$$Iy(x) = \int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \tan^{-1}x + c$$

即

$$\boxed{y(x) = (1+x^2)\tan^{-1}x + c(1+x^2)}$$

再由 $y(0) = 1 = c$, 故

$$\boxed{y(x) = (1+x^2)\tan^{-1}x + (1+x^2)}$$

14. 定義函數 $f(t)$ 的傅立葉轉換 (Fourier transform) 爲 $F(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt$，其中 $i=\sqrt{-1}$, 求 $f(t)\sin(w_0t)$ 的傅立葉轉換爲何？

(A) $\frac{i}{2}\{F(w+w_0)-F(w-w_0)\}$ (B) $\frac{1}{2}\{F(w+w_0)-F(w-w_0)\}$

(C) $\frac{1}{2}\{F(w+w_0)+F(w-w_0)\}$ (D) $\frac{i}{2}\{F(w+w_0)+F(w-w_0)\}$

《喻超凡, 喻超弘 101電力、電子、電信高考》

《解》 ☞ (A)；因 $\mathscr{F}\{f(t)\}=F(w)$，故

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{f(t)\sin(w_0t)\} &= \mathscr{F}\{f(t)\frac{1}{2i}(e^{iw_0t}-e^{-iw_0t})\}\\
&= \frac{1}{2i}\{F(w-w_0)-F(w+w_0)\}\\
&= -\frac{i}{2}\{F(w-w_0)-F(w+w_0)\}
\end{aligned}$$

15. 級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n}(x-5)^n$ 的收斂半徑 (radius of convergence) 爲何？

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\sqrt{10}$ (D) 10

《喻超凡, 喻超弘 101電力、電子、電信高考》

《解》 ☞ (D)；由

$$|x-5|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{10^n}}{\frac{(-1)^{n+1}}{10^{n+1}}}\right|=10$$

故收斂半徑爲 10

《解》 ☞ 因

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$$

故曲面在 $(0\,,\,0\,,\,4)$ 處的法向量爲

$$\vec{n}=\nabla f(0\,,\,0\,,\,4)=8\vec{k}$$

因此在點 $(0\,,\,0\,,\,4)$ 處的切平面爲

$$8(z-4)=0 \quad \text{即} \quad z=4$$

法線參數式爲

$$\boxed{\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=4+8t \end{cases}}$$

3. 矩陣 $A=\begin{bmatrix} \cos\theta\times\sin\theta & -\cos\theta & -\sin^2\theta \\ \cos^2\theta & \sin\theta & -\cos\theta\times\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$，求：

(1) A 是否爲一正交矩陣 (orthogonal matrix)？請簡要說明之。(5分)

(2) A 的反矩陣爲何？(5分)

(3) $|\det(A)|=$ ？(亦即矩陣 A 的行列式值的絕對值)

《**喻超凡**, **喻超弘** 101鐵路電力、電子特考》

《解》 ☞

(1) 因

$$(\cos\theta\times\sin\theta)^2+(\cos^2\theta)^2+\sin^2\theta=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$(-\sin^2\theta)^2+(-\cos\theta\times\sin\theta)^2+\cos^2\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\begin{aligned}&(\cos\theta\times\sin\theta)(-\sin^2\theta)+\cos^2\theta(-\cos\theta\times\sin\theta)+\sin\theta\times\cos\theta\\&=-\sin\theta\times\cos\theta+\sin\theta\times\cos\theta=0\end{aligned}$$

故 A 矩陣的行向量爲一組正規化正交集合, 故 A 爲正交矩陣。

(2) $A^{-1}=A^T=\begin{bmatrix} \cos\theta\times\sin\theta & \cos^2\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin^2\theta & -\cos\theta\times\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

《解》☞ (A)；

$$(1\,,\,2\,,\,-1)=a(1\,,\,0\,,\,1)+b(0\,,\,-1\,,\,2)+c(2\,,\,3\,,\,-5)$$

即

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ -b+3c=2 \\ a+2b-5c=-1 \end{cases}$$

故 $a=5$、$b=-8$、$c=-2$，即

$$[x]_{B'}=(5\,,\,-8\,,\,-2)$$

7. $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 24 & -21 & 2 & -13 \end{bmatrix}$ 則 **Rank** $(A)=$？

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 《喻超凡, 喻超弘 101鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (B)；

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 24 & -21 & 2 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}^{(2)}R_{13}^{(-8)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{bmatrix}$$

Rank $(A)=2$

8. 有一個矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 \\ 8 & -7 & 5 \end{bmatrix}$，請問下面何者正確？

(A) 此矩陣的秩 (rank) 爲 3？

(B) $[1\ \ 0\ \ 0.8]$, $[0\ \ 1\ \ 0.2]$, $[0\ \ 0\ \ 1]$ 爲矩陣 A 的列空間 (row space) 基底

(C) $[1\ \ 0\ \ \frac{23}{7}]^T$, $[0\ \ 1\ \ \boxed{\frac{2}{7}]^T}$, $[0\ \ 0\ \ 1]^T$ 爲矩陣 A 的行空間 (column space) 基底

(D) A 的行列式值 $=0$ 《喻超凡, 喻超弘 101鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (D)；

$$\det(A)=\frac{1}{10}\boxed{\begin{vmatrix}35 & -28\\ -115 & 92\end{vmatrix}}=0$$

9. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 3\\ 4 & 5 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 6 & -1\\ -3 & 8 & 9 & 1\end{bmatrix}$, 則 A 的行列式值 (determinant) 爲何？

(A) 123 (B) 234 (C) 456 (D) 567

《喻超凡, 喻超弘 101鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (D)

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2 & 3\\ 4 & 5 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 6 & -1\\ -3 & 8 & 9 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 9 & -12\\ 2 & 6 & -1\\ 8 & 3 & 10\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}12 & 63\\ -42 & 63\end{vmatrix}=63\times 9=567$$

10. 下列何者不爲正交矩陣 (orthogonal matrix)？

(A) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

《喻超凡, 喻超弘 101鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (D)；行向量大小不爲 1。

3. 101年國家安全局情報人員電子組特考

甲、申論題部分 (50分)

1. (15分) 請應用留數定理 (Residue Theorem) 計算下列積分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

《喻超凡, 喻超弘 101安全局電子組》

《解》☞ 令 $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$，故 $z = \pm i$、$\pm 2i$ 爲 $f(z)$ 的一階極點。但僅有 $z = i$、$z = 2i$ 在上半平面，且其殘值爲

$$\text{Res} f(i) = \lim_{z\to i} \frac{z^2}{2z(z^2+4)} = \frac{i}{2(-1+4)} = \frac{i}{6}$$

$$\text{Res} f(2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{z^2}{(z^2+1)2z} = \frac{2i}{(-4+1)2} = -\frac{i}{3}$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi i\{\text{Res} f(i) + \text{Res} f(2i)\} \\ &= \pi i(\frac{i}{6} - \frac{i}{3}) = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

2. 設 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 爲一線性轉換 (linear transformation)，定義如下：

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x_1 + 5x_2 + ax_3 \end{cases} \qquad (\text{其中 } a \text{ 爲一常數})$$

(1) 若 T 的反轉換 (inverse transformation) 存在，則常數 a 之值有何限制？(7分)

(2) 設 $a = 1$，求 T 的反轉換。(8分) 《喻超凡, 喻超弘 101安全局電子組》

令

$$P = [V_1 \quad V_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

故

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(3) ODE 的齊次解爲

$$X_h = \alpha_1 V_1\, e^{4t} + \alpha_2 V_2\, e^{-t}$$

再令 ODE 的特解爲

$$X_p = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{2t}$$

代回 ODE 中可得

$$2\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{2t} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

即

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ 3a + 1 = 0 \end{cases}$$

故 $a = -\dfrac{1}{3}$、$b = -\dfrac{1}{6}$，則

$$X_p = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{6} \end{bmatrix} \boxed{e^{2t}}$$

因此 ODE 的通解爲

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = X_h + X_p = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{6} \end{bmatrix} \boxed{e^{2t}}$$

再由

$$X(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{6} \end{bmatrix}$$

可解 $\alpha_1 = \dfrac{1}{10}$、$\alpha_2 = \dfrac{2}{15}$，即

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t} + \frac{2}{15}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{6} \end{bmatrix} \boxed{e^{2t}}$$

積分因子

$$I = \exp\{\boxed{\int \frac{3}{x}\,dx}\} = \exp\{3\ln|x|\} = x^3$$

故

$$Iy = \int x^3 \frac{1}{x^3}\,dx = x + c$$

即

$$y(x) = x^{-2} + c\,x^{-3}$$

由 $y(1) = -1 = 1 + c$, 故 $c = -2$, 即

$$y(x) = x^{-2} - 2x^{-3}$$

6. 令複數 $z = x + iy$，則方程式 $z^2 + \overline{z}^2 = 2$ 之幾何圖形爲何？
(A) 橢圓 (B) 拋物線 (C) 圓形 (D) 雙曲線
《喻超凡, 喻超弘 101地方特考電力、電子、電信工程》

《解》☞ (D)；因

$$z^2 + \overline{z}^2 = (z + \overline{z})^2 - 2\,z\,\overline{z} = (2x)^2 - 2(x^2 + y^2) = 2x^2 - 2y^2 = 2$$

方程式爲 $x^2 - y^2 = 1$，即幾何圖形爲雙曲線。

7. 設複數 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}$，其中 $i = \sqrt{-1}$，則 z^{40} 之值爲何？

(A) 1 (B) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}$
《喻超凡, 喻超弘 101地方特考電力、電子、電信工程》

《解》☞ (B)；因

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}$$

再令

$$P = [X_1 \;\; X_2 \;\; X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

2. 試計算 $\oint_C \dfrac{5z+7}{z^2+2z-3}\,dz$，其中曲線 C 之定義為 $|z-2|=2$ 之圓。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 101電子技師》

《解》☞ 令 $f(z) = \dfrac{5z+7}{z^2+2z-3}$，則 $f(z)$ 具有 $z=1$、$z=-3$ 的一階 poles，只有 $z=1$ 在 C 內，且

$$\text{Res} f(1) = \left.\frac{5z+7}{2z+2}\right|_{z=1} = \frac{12}{4} = 3$$

故

$$\boxed{\oint_C \frac{5z+7}{z^2+2z-3}\,dz = 2\pi i \,\text{Res} f(1) = 6\pi i}$$

3. (1) 試求函數 $f(x) = \begin{cases} -k & , -\pi < x < 0 \\ k & , 0 < x < \pi \end{cases}$ 之傅利葉級數；(10分)

(2) 使用 (1) 之結果試求級數和 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$。(5分)

《喻超凡, 喻超弘 101電子技師》

《解》☞

(1) 因 $f(x)$ 為奇函數，故令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

其中

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} k \sin nx\,dx = \frac{2k}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2k}{\pi}\,\frac{1-\cos n\pi}{n}$$