序

數學是所有科學之母，洩漏天機的語言，微積分這一門學問，它是僅次於歐氏幾何為數學上最偉大的成就之一，也是近代所有理工商等學門的基礎學科，因此是研讀理工商的同學必修的一門課程，但是因為它的理論艱澀繁瑣，枯燥難學，所以是浪多莘莘學子在學習上的一大夢魘。近年來由於數位科技的發達和網路的普及化下，學校在雲端，教室在網路，沒有上下課的鐘聲，上課的黑板永遠不會被擦掉，忘掉了可隨時回頭再複習，只要上網就可上課，進度可自行控制，同學是自己學習課程的主人，翻轉教室 (flipped classroom)、MOOC (Massive Open Online Course)、個人學習 (personalized learning) 現在已是整個世界學習的主流趨勢，因此喻超凡老師秉著服務同學的初衷，參考國內外著名之微積分叢書，以及在國立大學及全國各大補習班任教的教學心得，提綱挈領的將重點及觀念，以結構化的方式放在每一章節的開始，並於每一章節的精選範例中，加入重要的題型做整體而詳細的思路分析和講解說明，精編細撰出這本"翻轉微積分"，期能幫助想藉由翻轉學習的同學，在短時間內能對微積分有全盤性的認識及了解，進而讓同學翻轉成績，翻轉末來。

本書手稿雖經多次修訂及校對，但仍難免有所疏漏之處，敬請各位老師和同學不吝賜教，網址為 http://www.superyu.idv.tw。

喻超凡雲端

喻超凡

2018. 11.

目錄

第 1 章 函數的極限與連續

1.1 極限 (Limit)

1.1.1 極限的直覺意義

1. 定義

設函數 $f(x)$ 在 x 趨近 a 時，函數值 $f(x)$ 亦趨近 ℓ，則稱函數 $f(x)$ 在點 a 的極限為 ℓ, 而表示成 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$。

2. 觀念分析

(1) 兩個實數之間，必存在第三個實數，稱為實數系具有稠密性。

(2) 由實數的稠密性可知，數線上某一點 a 的鄰近區域中，包含了無窮多個點。

(3) 函數的極限乃是探討數線上某一點 a 鄰近區域中之無限個點函數值分佈的情況。

(a) 極限值為該無限個點函數值的 共同趨勢或一致結論 。

(b) 極限值為概估值。

(c) 函數值為正確值。

(4) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\neq a)}} f(x) = \ell$，若且唯若 $\lim\limits_{\substack{x\to a^+\\(x>a)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a^-\\(x<a)}} f(x) = \ell$。

1.1.2 極限的基本定理

設 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$、$\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ 且 A、$B \in \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{x\to a} k\, f(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x) = kA$；$k \in \mathbb{R}$

2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\pm B$

3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\cdot B$

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{A}{B}$; $(B\neq 0)$

5. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{A}$; $\sqrt[n]{A}\in\mathbb{R}$

6. 設 $f(x)=A$ (常數) , 則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$

1.1.3 運算子 ∞ (operator infinity)

1. ∞ 的基本運算

(1) $c\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \infty\pm c=\infty$

(2) $\infty+\infty=\infty$

(3) $c>0\ \Rightarrow\ \infty\cdot c=\infty$; $c<0\ \Rightarrow\ \infty\cdot c=-\infty$; $\infty\cdot\infty=\infty$

(4) $c>0\ \Rightarrow\ \infty^c=\infty$; $c<0\ \Rightarrow\ \infty^c=0$

(5) $\dfrac{1}{\pm\infty}=0$

(6) $\dfrac{1}{0^+}=+\infty$; $\dfrac{1}{0^-}=-\infty$

2. ∞ 的不定型 (Indeterminate form) : (下面的 0 與 1 , 爲近似的 0 與 1)

(1) $0\cdot\infty=0\cdot\dfrac{1}{0^+}=\dfrac{1}{\pm\infty}\cdot\infty$; (故 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ 亦爲不定型)

(2) $\infty-\infty$

(3) $(0^+)^0=e^{0\cdot\ln 0^+}=e^{0\cdot(-\infty)}$; ($\because\ \ln 0^+=\log_e 0^+\to-\infty$)

$\infty^0=e^{0\cdot\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}$; ($\because\ \ln\infty=\log_e\infty\to\infty$)

$1^\infty=e^{\infty\cdot\ln 1}=e^{\infty\cdot 0}$; ($\because\ \ln 1=\log_e 1=0$)

1.1.4 極限的直覺求法

1. 連續型 (直接代入法)

(1) 多項式：

$$\lim_{x\to b}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

(2) 分式：(分母不爲零)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \quad ; \quad (g(a)\neq 0)$$

2. $\dfrac{0}{0}$ 型

(1) 觀念分析

(a) 函數的分子及分母有一次或一次重因式之公因式時，則表示函數在該處爲不連續點。

(b) 消去一次或一次重因式之公因式，則表示將函數的不連續點變成連續點。

(c) $\forall\ x \neq a$，$f(x) = g(x)$，則 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$。

(2) 分式型：分子與分母因式分解後，消去公因式，再以代入法求出極限值。

(3) 根式型：有理化後，消去公因式，再以代入法求出極限值。

常用的有理化公式如下：

(a) $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

(b) $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$

(c) $\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} = \dfrac{a-b}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

(d) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

3. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

(1) 分式型與根式型：提出分子與分母最高次因式，再以代入法求出極限值。

(a) 函數分子最高次因式的次數大於分母，則極限值爲 $\pm\infty$。

(b) 函數分子最高次因式的次數等於分母，則極限值爲分子與分母最高次因式的係數比值

(c) 函數分子最高次因式的次數小於分母，則極限值爲 0。

(2) 指數型：同除最大底 (最小底) 之指數函數，再以代入法求出極限值。

4. $\infty-\infty$ 型

(1) 分式型：通分化簡。

(2) 根式型：有理化。

(3) 對數型：合併相同底的項。

1.1.5 L'Hôpital Rule (羅必達法則) 初論

本節爲 L'Hôpital Rule 初論，是給已經有學習過微分理論的同學先修的，有關 L'Hôpital Rule 的完整理論，將在第 165 頁 2.5 節中討論，倘若同學尚未學習過微分理論，本節可先行忽略。

1. 設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$，若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$

2. 設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$，若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$

---

*Guillaume Francois Antoine Marquis de L'Hôpital(1661∼1704) 法國數學家。此一法則是 Johann Bernoulli(July 1667∼Jan 1748) 首先發現的, 當時 L'Hôpital 正花錢請 Bernoulli 教授他微積分，因此 Bernoulli 就用 L'Hôpital 來命名。L'Hôpital 正確的法國發音爲 Low-pee-tall (French: [lopital])。

精選範例

1. 探討 $f_1(x)=x+2$、$f_2(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，兩函數於 $x=2$ 之極限。

《解》 ☞

x	1.9	1.99	1.999	$\cdots 2 \cdots$	2.001	2.01	2.1
$f_1(x)$	3.9	3.99	3.999	$\cdots 4 \cdots$	4.001	4.01	4.1
$f_2(x)$	3.9	3.99	3.999	$\cdots \times \cdots$	4.001	4.01	4.1

因此由定義可得 $\lim\limits_{x\to 2} f_1(x)=4=f_1(2)$ 、 $\lim\limits_{x\to 2} f_2(x)=4\neq f_2(2)$

2. 求下列極限 《台大》

(a) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{x+4}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt{3x-2+\sqrt{x+1}}$

《提示》 ➥ 直接代入法

《解》 ☞

(a) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{x+4}}=\sqrt{\dfrac{27+1}{-3+4}}=\sqrt{28}$

(b) $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt{3x-2+\sqrt{x+1}}=\sqrt{24-2+\sqrt{8+1}}=5$

3. If $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$, find the limit : $\lim\limits_{x\to -2}\{f(x)+\dfrac{f(x)}{x}\}$. 《台聯A2》

《解》☞ 因

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to -2}\{f(x)\cdot\frac{1}{x^2}\}=\lim_{x\to -2}f(x)\cdot\lim_{x\to -2}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to -2}f(x)\cdot\frac{1}{4}=2$$

故 $\lim_{x\to -2}f(x)=8$, 因此

$$\lim_{x\to -2}\{f(x)+\frac{f(x)}{x}\}=8+\frac{8}{-2}=4$$

4. 求 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

《提示》➥ $\dfrac{0}{0}$ 分式型

《解》☞ $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{5}{4}$

5. Find $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x^2-3}{3x^3-4x+1}$

《提示》➥ $\dfrac{0}{0}$ 分式型

《解》☞ $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x^2-3}{3x^3-4x+1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x^2+3x+3)}{(x-1)(3x^2+3x-1)}=\dfrac{8}{5}$

6. 求 $\lim_{t\to 2}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{2+t}}-\sqrt{3}}{t-2}$ 《台大》

《提示》➥ $\dfrac{0}{0}$ 根式型

《解》☞

$$\lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2+t}}-\sqrt{3}}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}-\sqrt{3})(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})}{(t-2)(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 2}\frac{(\sqrt{2+t}-2)}{(t-2)(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})}\\
&= \lim_{t\to 2}\frac{(\sqrt{2+t}-2)(\sqrt{2+t}+2)}{(t-2)(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})(\sqrt{2+t}+2)}\\
&= \lim_{t\to 2}\frac{t-2}{(t-2)(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})(\sqrt{2+t}+2)}\\
&= \lim_{t\to 2}\frac{1}{(\sqrt{1+\sqrt{2+t}}+\sqrt{3})(\sqrt{2+t}+2)}\\
&= \frac{1}{8\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

7. 求下列極限

(a) $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{4t+5}-3}{\sqrt{t+3}-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1}$

《提示》 ➥ $\frac{0}{0}$ 根式型

《解》 ☞

(a)

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{4t+5}-3}{\sqrt{t+3}-2} &= \lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{4t+5}-3}{\sqrt{t+3}-2}\cdot\frac{\sqrt{4t+5}+3}{\sqrt{4t+5}+3}\cdot\frac{\sqrt{t+3}+2}{\sqrt{t+3}+2}\\
&= \lim_{t\to 1}\frac{4(t-1)(\sqrt{t+3}+2)}{(t-1)(\sqrt{4t+5}+3)}\\
&= \lim_{t\to 1}\frac{4(\sqrt{t+3}+2)}{\sqrt{4t+5}+3} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1} &= \lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1}{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1}\\
&= \lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1)}\\
&= \lim_{t\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}+\sqrt[3]{t}+1}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$

《提示》 ➥ $\dfrac{0}{0}$ 根式型

《解》 ☞

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x(1+x)}-\frac{\sqrt{1-2x}-1}{x(1+x)}\right\}\\
&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{(\sqrt[3]{1+3x}-1)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}{x(1+x)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{(\sqrt{1-2x}-1)(\sqrt{1-2x}+1)}{x(1+x)(\sqrt{1-2x}+1)}\right\}\\
&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1+3x-1}{x(1+x)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}-\frac{1-2x-1}{x(1+x)(\sqrt{1-2x}+1)}\right\}\\
&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{3}{(1+x)(\sqrt[3]{(1+3x)^2}+\sqrt[3]{1+3x}+1)}-\frac{-2}{(1+x)(\sqrt{1-2x}+1)}\right\}\\
&=\frac{3}{3}-(-\frac{2}{2})=2
\end{aligned}$$

9. 求下列極限

(a) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{\sqrt{t+7}-3}{\sqrt{t+2}-2}$

(b) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^3+1}-\sqrt{t^2+1}}{t}$

(c) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+t+t^3}-\sqrt[3]{8+t}}{\sqrt[3]{8+t}-\sqrt[3]{8+t^3}}$

(d) $\lim\limits_{t\to 27}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt[3]{t}}-2}{t-27}$

《提示》 ➥ $\dfrac{0}{0}$ 根式型

《解》 ☞

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{t+7}-3}{\sqrt{t+2}-2} &= \lim_{t\to 2}\frac{(\sqrt{t+7}-3)(\sqrt{t+7}+3)(\sqrt{t+2}+2)}{(\sqrt{t+2}-2)(\sqrt{t+7}+3)(\sqrt{t+2}+2)}\\
&= \lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(\sqrt{t+2}+2)}{(t-2)(\sqrt{t+7}+3)}\\
&= \lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{t+2}+2}{\sqrt{t+7}+3}\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^3+1}-\sqrt{t^2+1}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t(t^2-t)}{t(\sqrt{t^3+1}+\sqrt{t^2+1})}=\frac{0}{2}=0$

(c) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+t+t^3}-\sqrt[3]{8+t}}{\sqrt[3]{8+t}-\sqrt[3]{8+t^3}}$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt[3]{8+t+t^3}-\sqrt[3]{8+t})(\sqrt[3]{(8+t)^2}+\sqrt[3]{(8+t)(8+t^3)}+\sqrt[3]{(8+t^3)^2})}{(\sqrt[3]{8+t}-\sqrt[3]{8+t^3})(\sqrt[3]{(8+t)^2}+\sqrt[3]{(8+t)(8+t^3)}+\sqrt[3]{(8+t^3)^2})}\\
&\quad\cdot\frac{(\sqrt[3]{(8+t+t^3)^2}+\sqrt[3]{(8+t+t^3)(8+t)}+\sqrt[3]{(8+t)^2})}{(\sqrt[3]{(8+t+t^3)^2}+\sqrt[3]{(8+t+t^3)(8+t)}+\sqrt[3]{(8+t)^2})}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{t^3(\sqrt[3]{(8+t)^2}+\sqrt[3]{(8+t)(8+t^3)}+\sqrt[3]{(8+t^3)^2})}{t(1-t)(1+t)(\sqrt[3]{(8+t+t^3)^2}+\sqrt[3]{(8+t+t^3)(8+t)}+\sqrt[3]{(8+t)^2})}\\
&=0
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 27}\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{t}}-2}{t-27} &= \lim_{t\to 27}\frac{(\sqrt[3]{t}-3)(\sqrt[3]{t^2}+3\sqrt[3]{t}+9)}{(t-27)(\sqrt{1+\sqrt[3]{t}}+2)(\sqrt[3]{t^2}+3\sqrt[3]{t}+9)}\\
&= \lim_{t\to 27}\frac{t-27}{(t-27)(\sqrt{1+\sqrt[3]{t}}+2)(\sqrt[3]{t^2}+3\sqrt[3]{t}+9)}\\
&= \frac{1}{108}
\end{aligned}$$

10. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x+1}{4x^2}$

《提示》 ➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 分式型

《解》☞ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{4x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\}}{4x^2}=\dfrac{3}{4}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x+4}}{1+x}$ 《中興》

《提示》➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 根式型

《解》☞ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x+4}}{1+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}}{\frac{1}{x}+1}=1$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{3x+1}$

《提示》➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 根式型

《解》☞ 令 $x=-u$, 故

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{3x+1}=\lim_{u\to\infty}\frac{-u+\sqrt{u^2+1}}{-3u+1}=\lim_{u\to\infty}\frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}{-3+\frac{1}{u}}=0$$

13. Consider the function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ defined by $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. Note f is well defined as $x^2+1>0$ for all $x\in\mathbb{R}$. Please find $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. Show your work.

《政大國貿金融統計資管》

《解》☞ 令 $x=-t$, 故 $x\to-\infty$, 則 $t\to\infty$, 因此

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-1}{\sqrt{(-t)^2+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-1}{\sqrt{t^2+1}}=-1$$

14. 求下列極限：

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-4^x}{3^x+4^x}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x-4^x}{3^x+4^x}$

《提示》 ➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 指數型

《解》 ☞

(a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-4^x}{3^x+4^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{3}{4})^x-1}{(\frac{3}{4})^x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-4^x}{3^x+4^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-(\frac{4}{3})^x}{1+(\frac{4}{3})^x}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

15. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}$

《提示》 ➥ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 指數型

《解》 ☞ 因

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}+1}{\frac{3}{2^{\frac{1}{x}}}-1}=-1$$

且

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{3}$$

故

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}\neq\lim_{x\to0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3-2^{\frac{1}{x}}}$$

因此極限不存在。

16. Find the value of c such that the limit exists and evaluate the limit.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{c}{x^3-1}\right)$$

《台大C》

《**提示**》➥ $\infty-\infty$ 分式型

《**解**》☞ 因

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{c}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-c}{x^3-1}=\text{存在}$$

因分母函數 $x=1$ 時為 0，故 $(x^2+x+1-c)\Big|_{x=1}=3-c=0$，可得 $c=3$，且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{c}{x^3-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-c}{x^3-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{x^3-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{3x^2}=1\end{aligned}$$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ 《台聯大A3、台大》

《**提示**》➥ $\infty-\infty$ 根式型

《**解**》☞

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\\ =&\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}\\ =&\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

18. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$ 《成大、政大財政》

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 根式型

《解》 ☞

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1\end{aligned}$$

19. 求下列極限

(a) $\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+t+1}-t)$ (b) $\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t+\sqrt{t}}-\sqrt{t-\sqrt{t}})$

(c) $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt{t}\,(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}\,)$

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 根式型

《解》 ☞

(a) $$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+t+1}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{\sqrt{t^2+t+1}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

(b)

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t+\sqrt{t}}-\sqrt{t-\sqrt{t}})\frac{\sqrt{t+\sqrt{t}}+\sqrt{t-\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t}}+\sqrt{t-\sqrt{t}}}\\ &=\lim_{t\to+\infty}\frac{t+\sqrt{t}-t+\sqrt{t}}{\sqrt{t+\sqrt{t}}+\sqrt{t-\sqrt{t}}}\end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{t}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{t}}}} = 1$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\,(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}\,) &= \lim_{t\to\infty} \sqrt{t}\,(\sqrt{t+1}-\sqrt{t-1}\,)\frac{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}\,(t+1-t+1)}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}+\sqrt{1-\frac{1}{t}}} = 1
\end{aligned}$$

20. $\lim_{x\to-\infty}\{\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+2x+1}\}$ 《政大經濟》

《解》 ☞ 令 $t=-x$，故 $x\to-\infty$，則 $t\to\infty$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\{\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2+2x+1}\} \\
=\ & \lim_{t\to\infty}\{\sqrt{t^2-4t+5}-\sqrt{t^2-2t+1}\} \\
=\ & \lim_{t\to\infty} \frac{(t^2-4t+5)-(t^2-2t+1)}{\sqrt{t^2-4t+5}+\sqrt{t^2-2t+1}} \\
=\ & \lim_{t\to\infty} \frac{-2t+4}{\sqrt{t^2-4t+5}+\sqrt{t^2-2t+1}} = -1
\end{aligned}$$

21. Find the limit : $\lim_{x\to1^+}\{\ln(x^5-1)-\ln(x^3-1)\}$. 《中正理工系》

《提示》 ➥ $\infty-\infty$ 對數型

《解》 ☞

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1^+}\{\ln(x^5-1)-\ln(x^3-1)\} &= \lim_{x\to1^+} \ln\frac{x^5-1}{x^3-1} = \ln\{\lim_{x\to1^+}\frac{x^5-1}{x^3-1}\} \\
&= \lim_{x\to1^+} \ln\{\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\} \\
&= \ln(\frac{5}{3})
\end{aligned}$$

挑戰範例

1. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 滿足

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = 2$ (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2} = 3$

試求 a、b、c、d。

《提示》 ➥ 1. 明顯條件：(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = 2$ ， (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2} = 3$

2. 暗示條件：(a) $f(1) = 0$ ， (b) $f(2) = 0$

《解》 ☞

(a) 由暗示條件可令

$$f(x) = (x-1)(x-2)(\alpha x + \beta)$$

(b) 由明顯條件可知

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-2)(\alpha x+\beta) = -\alpha - \beta = 2$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-1)(\alpha x+\beta) = 2\alpha + \beta = 3$$

解上式可得 $\alpha = 5$、$\beta = -7$，故

$$f(x) = (x-1)(x-2)(5x-7) = 5x^3 - 22x^2 + 31x - 14$$

2. Is there a number a such that the following limit exists? If so, find the value of a and the value of the limit.

$$\lim_{x\to -2}\frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

《政大資管》

《解》☞ 令 $f(x)=3x^2+ax+a+3$，當

$$f(-2)=3(-2)^2+a(-2)+a+3=15-a=0$$

可得 $a=15$ 時，極限存在。且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to-2}\frac{3x^2+15x+15+3}{x^2+x-2}\\ &= \lim_{x\to-2}\frac{3(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-1)}\\ &= -1\end{aligned}$$

3. 試求滿足下列二條件的最低次多項式 $f(x)$

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2}=2$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$

《提示》➥ 1. 明顯條件：(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2}=2$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$

2. 暗示條件：(a) $\deg\{f(x)\}=4$, (b) $f(1)=0$

《解》☞

(a) 由暗示條件可知 $\deg\{f(x)\}=4$，且缺 x^3 項，及 $f(1)=0$，故可令

$$f(x)=(x-1)(x^3+x^2+\alpha x+\beta)$$

(b) 由明顯條知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha-1)x^2+(\beta-\alpha)x-\beta}{x^2}=\alpha-1=2$$

故 $\alpha=3$，再由

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^3+x^2+\alpha x+\beta)=1+1+\alpha+\beta=1$$

故 $\beta=-4$，因此

$$f(x)=(x-1)(x^3+x^2+3x-4)=x^4+2x^2-7x+4$$

4. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4x+1}-(ax+1)}{x^2}=b$，其中 a、$\in\mathbb{R}$，則 a、b 爲何？

《解》 ☞ 因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4x+1}-(ax+1)}{x^2}=b$$

有理化分子可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-a^2)x^2+(4-2a)x}{x^2(\sqrt{x^2+4x+1}+ax+1)}=b$$

故可得 $4-2a=0$，則 $a=2$，代回上式可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3}{\sqrt{x^2+4x+1}+2x+1}=b$$

則 $b=-\dfrac{3}{2}$

5. If $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$, then $a-b=$? 《台聯大A3A4A7》

《解》 ☞ 由

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+b-4}{x\sqrt{ax+b}+2}=1$$

可得 $b-4=0$，即 $b=4$，由

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax+b-4}{x\sqrt{ax+b}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x\sqrt{ax+b}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2}=\frac{a}{4}=1$$

故 $a=4$。則 $a-b=4-4=0$

6. a、$b\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-(1+ax)}{x^2}=b$，求 a、b 之值。

《解》☞ 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-(1+ax)}{x^2}=b$，故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1-2ax-a^2x^2}{x^2[\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)]} &= \lim_{x\to 0}\frac{x(1-2a)+x^2(1-a^2)}{x^2[\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)]}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-2a)+x(1-a^2)}{x[\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)]}\\ &= b\end{aligned}$$

故 $(1-2a)=0$，可解得 $a=\dfrac{1}{2}$，代回原式可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}x}{x[\sqrt{1+x+x^2}+(1+\frac{1}{2}x)]}=\frac{3}{8}=b$$

故可得 $a=\dfrac{1}{2}$、$b=\dfrac{3}{8}$。

7. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，則實數 a、b 為何？

《解》☞ 因 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-ax-b}{x}=0$$

由

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-ax-b}{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right\}=1-a=0$$

可得 $a=1$，代回原式可得

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x-b)=0$$

故

$$b=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\frac{1}{2}$$

8. Suppose that a, b and c are constants and $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}+3x)=2$, then $(a\,,\,b)=?$ 《台大B》

《解》 ☞ 令 $x=-t$，當 $x\to-\infty$，故 $t\to\infty$，原式可改寫成

$$\lim_{t\to\infty}(\sqrt{at^2-bt+c}-3t)=2$$

有理化可得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{at^2-bt+c-9t^2}{\sqrt{at^2-bt+c}+3t}=\lim_{t\to\infty}\frac{(a-9)t^2-bt+c}{\sqrt{at^2-bt+c}+3t}=2$$

故 $a-9=0$ 且 $\dfrac{-b}{\sqrt{a}+3}=2$，可求得 $a=9$ 及

$$b=-2(\sqrt{a}+3)=-2(3+3)=-12$$

因此 $(a\,,\,b)=(9\,,\,-12)$。

9. (a) Find the limit $\lim_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{x^2-2x}$ if it exits. 《中山海科》

(b) 已知 m 爲有理數，求 $\lim_{x\to1}(\dfrac{x^m-1}{x-1})=?$ 《中興C組》

《解》 ☞ 利用 L'Hôpital Rule 來求解

(a) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-x}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}-1}{2x-2}=-\frac{3}{8}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to1}(\frac{x^m-1}{x-1})=\lim_{x\to1}mx^{m-1}=m$

精選習題

1. Find $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x+\sin x)$. 《高大資工》

《解》☞ ： 1

2. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

《解》☞ ： -2

3. The value of $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$ is ? 《北大經濟》

《解》☞ ： $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{10-3x}-2}$ 《海洋大學》

《解》☞ ： $-\dfrac{4}{3}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\cos(\sin^{-1}(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}))$ 《政大數學一》

《解》☞ ： $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 求 $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{2x-10}=?$ 《嘉義大學》

《解》☞ ： $-\dfrac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{a+h}-\sqrt[3]{a-h}}{h}$ 《中興》

《解》☞ ： $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{a^2}}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2-1}}$. 《政大商院》

《解》☞ ： 3

9. $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\sqrt{y^2+2}}{5y-6}=?$ 《政大經濟》

《解》☞ ：$\dfrac{1}{5}$

10. $\lim\limits_{y\to\infty}\sqrt{y^2+5y}-y$ 《台大》

《解》☞ ：$\dfrac{5}{2}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+3}\cdot(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$ 《成大B》

《解》☞ ：$\dfrac{1}{2}$

12. Find value of $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+2x}-3x)$. 《台師電機》

《解》☞ ：$\dfrac{1}{3}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-n-4})$ 《政大經濟》

《解》☞ ：2

14. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$。 《中山電機》

《解》☞ ：$\dfrac{3}{2}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+2x})=?$ 《台大C》

《解》☞ ：-1

16. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-x)=?$ 《政大財政》

《解》☞ ：2

17. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2+x}\ )$ 《高大應物》

《解》☞ ：$-\dfrac{1}{4}$

18. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left\{\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right\}$

《解》☞ ：1

19. 令 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$a\neq 0$, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{x+1}=2$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$, 求 $(a\,,\,d)=?$ 《政大財政》

《解》☞ ：$(a\,,\,d)=(\dfrac{3}{4}\,,\,\dfrac{1}{4})$。

1.2 特殊函數極限

觀念分析： 解特殊函數的極限，首先須利用特殊函數的定義，消去特殊函數。

1.2.1 夾擠定理 (The Squeeze Theorem or The Sandwich Theorem)

1. 若 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$，$0 < |x-a| < \delta$，且

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$$

則 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

2. 若 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$，$\forall\, x \geq k$，且

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} h(x) = \ell$$

則 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell$

1.2.2 高斯函數 $[x]$ (最大整數函數 Greatest Integer Function)

1. 定義及基本性質：$[x]$：取不大於 x 的最大整數。

(1) $[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$，$\forall\, n \in \mathbb{Z}$

(2) $[[x]] = [x]$

(3) $[x \pm n] = [x] \pm n$，$\forall\, n \in \mathbb{N}$

(4) $[x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1$，故 $x - 1 < [x] \leq x$

(5) $[-x] = -[x] - 1$，$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

2. 消去高斯函數的方法：

(1) 直接消除法：已知 x 介於兩連續整數之間，即 $n < x < n+1$，則 $[x] = n$。

(2) 間接消除法：

(a) $x \to a \;\Rightarrow\; x - 1 < [x] < x$。

(b) $x \to \pm\infty \Rightarrow x - 1 < [x] \leq x$。

1.2.3 其他特殊函數

1. 絕對值函數

(1) 定義

$$|x| = \begin{cases} x & ;\ x \geq 0 \\ -x & ;\ x < 0 \end{cases}$$

(2) 基本性質

(a) $|xy| = |x||y|$、$|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$；$(y \neq 0)$

(b) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

(c) $|x \pm y \pm z| \leq |x| + |y| + |z|$

2. 符號函數

$$\text{sgn(x)} = \begin{cases} 1 & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ x = 0 \\ -1 & ;\ x < 0 \end{cases}$$

3. 二項式

(1)

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \cdots + C_n^n x^n\ ;\ (n \in \mathbb{N}) \\ &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^n \end{aligned}$$

其中 $C_m^n = C(n\,,\,m) = \dfrac{n!}{(n-m)!m!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$

(2) $(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$ ；$(n \notin \mathbb{N} \cup \{0\})$

(3) $(1+h)^n \geq 1 + nh > nh$；$(n \in \mathbb{N}\,,\ h > 0)$

精 選 範 例

1. 求下列極限

(a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-[x]}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x \to 10^-} \dfrac{[x^3]-x^3}{[x]-x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{[x]}{x}$

《提示》 ➥ 高斯函數直接消除法：$n < x < n+1 \Rightarrow [x] = n$

《解》 ☞

(a) $x \to 1^+$，則 $1 < x < 2$，故 $[x] = 1$，因此

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-[x]}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

(b) $x \to 10^-$，則 $9 < x < 10$，故 $[x] = 9$，又 $x \to 10^-$，則 $x^3 \to 1000^-$，故 $999 < x^3 < 1000$，因此 $[x^3] = 999$，故

$$\lim_{x \to 10^-} \frac{[x^3]-x^3}{[x]-x} = \lim_{x \to 10^-} \frac{999-x^3}{9-x} = \frac{-1}{-1} = 1$$

(c) $x \to 0^+$，則 $0 < x < 1$，故 $[x] = 0$，因此

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{0}{x} = 0$$

2. 求 $\lim\limits_{x \to a}[x-[x-1]]$

《提示》 ➥ $[x \pm n] = [x] \pm n$，$\forall n \in \mathbb{N}$

《解》 ☞ $\lim\limits_{x \to a}[x-[x-1]] = \lim\limits_{x \to a}[x-[x]] + 1 = \lim\limits_{x \to a}([x]-[x]) + 1 = 1$

3. 求 $\lim\limits_{x\to 1}[2x-x^2]$

《解》☞ 令 $x=1+t$, 則

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}[2x-x^2] &= \lim_{t\to 0}[2(1+t)-(1+t)^2]\\ &= \lim_{t\to 0}[2+2t-1-2t-t^2]\\ &= \lim_{t\to 0}[1-t^2] \quad (\because\ t\to 0\Rightarrow t^2\to 0^+)\\ &= 0\end{aligned}$$

4. 求 (a) $\lim\limits_{x\to 0^+}[\frac{1}{x}]x$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}]x^2$ 《中興B組》

《提示》➥ (1) 高斯函數間接消除法：

(i) $x\to a\Rightarrow x-1<[x]<x$

(ii) $x\to\pm\infty\Rightarrow x-1<[x]\le x$

(2) 配合夾擠定理

《解》☞

(a) 因 $x\to 0^+$, 則 $\frac{1}{x}\to\infty$, 故

$$\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$$

上式同乘 $x(>0)$, 故可得

$$1-x<[\frac{1}{x}]x\le 1$$

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$, 故由夾擠定理知

$$\lim_{x\to 0^+}[\frac{1}{x}]x=1$$

(b) 因 $x \to 0$，則 $\dfrac{1}{x} \to \pm\infty$，故

$$\frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] \leq \frac{1}{x}$$

上式同乘以 $x^2(>0)$，故可得

$$x - x^2 < [\frac{1}{x}]x^2 \leq x$$

又 $\lim\limits_{x\to 0}(x - x^2) = 0$，且 $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$，故由夾擠定理知

$$\lim_{x\to 0}[\frac{1}{x}]x^2 = 0$$

5. Find the limit. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$. 《台聯A2, A3》

《解》 ☞

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x(x^2-1)}{(x^2-1)} = \lim_{x\to -1^-} x = -1$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x(x^2-1)}{-(x^2-1)} = \lim_{x\to -1^+} -x = 1$$

因 $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x(x^2-1)}{|x^2-1|} \neq \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$，故 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$ 不存在。

6. Find $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x(x-2)}{|x-2|}$. 《高師數學物理光電》

《解》 ☞ 因

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x(x-2)}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x(x-2)}{-(x-2)} = -4$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x(x-2)}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x(x-2)}{(x-2)} = 4$$

故 $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x(x-2)}{|x-2|} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x(x-2)}{|x-2|}$，因此 $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x(x-2)}{|x-2|}$ 不存在。

7. 求 (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|-2-x|-|-2|}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$

《解》 ☞

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|-2-x|-|-2|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$

(b) 因

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1 \text{ 、 } \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=-1$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{|x|}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{|x|}$，由定義知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ 不存在

8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)\cdot|x|$

《解》 ☞ 因 $x\to 0$，故 $-1\le\operatorname{sgn}(x)\le 1$，同乘以 $|x|$，可得

$$-|x|\le\operatorname{sgn}(x)\cdot|x|\le|x|$$

因 $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，由夾擠定理知

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)\cdot|x|=0$$

9. $f(x)=\begin{cases}x^2 & ;\text{若 } x\in\mathbb{Q}\\ x^3 & ;\text{若 } x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$

《解》 ☞ 因 $x\to 1^+$，則 $x>1$，故 $x^2<x^3$，則

$$x^2\le f(x)\le x^3$$

因

$$\lim_{x\to 1^+}x^2=1 \text{ 、 } \lim_{x\to 1^+}x^3=1$$

故由夾擠定理知 $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

10. 試證若 $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$，則 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

《証》 ☞ 因爲

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

且 $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$，故由夾擠定理知 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

11. 試證若 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ 且 $|g(x)| \le M$ $(M > 0)$，$\forall\ 0 < |x-a| < \delta$，即函數 $g(x)$ 在區間 $0 < |x-a| < \delta$ 中爲有界的函數，則 $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$

《証》 ☞ 因 $|g(x)| \le M$ $(M > 0)$，$\forall\, 0 < |x-a| < \delta$，則

$$0 \le |f(x)g(x)| = |f(x)|\ |g(x)| \le |f(x)|\, M$$

又 $\lim_{x \to a} f(x) = 0$，故

$$\lim_{x \to a} 0 = \lim_{x \to a} |f(x)|\, M = 0$$

故由夾擠定理知 $\lim_{x \to a} |f(x)g(x)| = 0$，故 $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$

12. 試證明 $\lim_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0.$ 《政大財政、南大電機》

《解》 ☞ 因

$$0 \le |x^2 \sin \frac{1}{x}| \le x^2$$

且 $\lim_{x \to 0} 0 = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$，由挾擠定可知 $\lim_{x \to 0} |x^2 \sin \dfrac{1}{x}| = 0$，故

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

13. 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{x-[x]}$ 《成大》

《解》 ☞ 因為

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{x-[x]} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\frac{1}{x}$$

又

$$0 \le \left| x^2 \sin\frac{1}{x} \right| \le x^2$$

且 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$，故由夾擠定理知 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left| x^2 \sin\frac{1}{x} \right| = 0$，故

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

則 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{x-[x]} = 0$

14. 求下列極限

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \{\sin\ln(x+1) - \sin\ln x\}$

《提示》 ➥ 求極限 ⇒ 和差化積；求積分 ⇒ 積化和差

積化和差：$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$$

和差化積：$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

《解》 ☞

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\,) &= \lim_{x\to\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\\ &= \lim_{x\to\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}\end{aligned}$$

因

$$0\le\left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}\right|\le 2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}\right|$$

又

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}=\sin 0=0$$

則

$$\lim_{x\to\infty}2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}\right|=0$$

故根據夾擠定理知

$$\lim_{x\to\infty}\left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}\right|=0$$

故

$$\lim_{x\to\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)}=0$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\,)=0$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty}\{\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\}=\lim_{x\to\infty}2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}$$

則

$$0\le\left|2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\right|$$

又

$$\lim_{x\to\infty}\{\ln(x+1)-\ln x\}=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+1}{x}=\ln 1=0$$

則

$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}=0$$

故

$$\lim_{x\to\infty}2\left|\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\right|=0$$

故根據夾擠定理知

$$\lim_{x\to\infty}\left|2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}\right|=0$$

則

$$\lim_{x\to\infty}2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}=0$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}\{\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\}=0$$

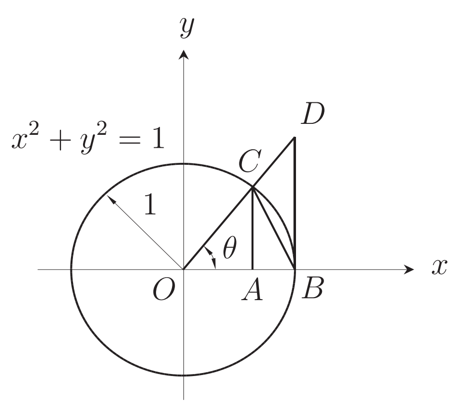
15. 求下列極限

(a) $\lim\limits_{\theta\to0^+}\cos\theta=1$

(b) $\lim\limits_{\theta\to0^+}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$

(c) $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$

(d) $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}=1$



《証》 ☞ 因 $\theta\to0^+$，故 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，由上圖可知

$$\Delta OBC<\text{扇形 }OBC\text{ 面積}<\Delta OBD$$

則

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin\theta<\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\theta<\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan\theta$$

故

$$0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

因 $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \theta = 0$, 由夾擠定理可知

$$\lim_{\theta\to 0^+} \sin\theta = 0$$

(a) 由

$$0 < 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} < 2\cdot(\frac{\theta}{2})^2 = \frac{\theta^2}{2}$$

且 $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \dfrac{\theta^2}{2} = 0$, 由夾擠定理可知

$$\lim_{\theta\to 0^+} (1-\cos\theta) = 0$$

故 $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \cos\theta = 1$

(b) 由

$$\sin\theta < \theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

則

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

故

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

又 $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \cos\theta = 1$, 故根據夾擠定理可知

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

(c) 由

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

令 $\theta = -t$, 故 $\theta \to 0^+$, 則 $t \to 0^-$, 代入上式可得

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\sin(-t)}{(-t)} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\sin t}{t} = 1$$

因

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0^-} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

故

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

(d)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\{\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta}=1$$

16. 試證
(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!}=0$

《提示》 ➥ 分母縮小 (保留一項)，則不等式放大。

《証》 ☞

(a) 因

$$0<\frac{n!}{n^n}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n\cdot n\cdot n\cdots n\cdot n\cdot n}<\frac{1}{n}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，故根據夾擠定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

(b) 因

$$0<\frac{3^n}{n!}=\frac{3\cdot 3\cdot 3\cdots 3\cdot 3\cdot 3}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}<\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{1}=\frac{27}{2n}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{27}{2n}=0$，故根據夾擠定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}=0$$

(c) 因

$$0<\frac{n^2}{n!}=\frac{n\cdot n}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}<\frac{n}{(n-1)}\cdot\frac{1}{(n-2)}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n-1)(n-2)}=0$，故根據夾擠定理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!}=0$$

17. 試證下列極限 《政大經濟》
(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}=1$

《証》☞

(a) 因 $n\to\infty$，故 $n>1$，則 $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n]{1}=1$，因此

$$\exists\, h_n>0 \;\text{ 使得 }\; \sqrt[n]{n}=1+h_n$$

故

$$n=(1+h_n)^n>\frac{n(n-1)}{2!}\,h_n^2$$

兩端乘上 $\dfrac{2}{n(n-1)}$，可得

$$h_n^2<\frac{2n}{n(n-1)}$$

兩端開根號可得

$$0<h_n<\sqrt{\frac{2n}{n(n-1)}}$$

又 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n}{n(n-1)}}=0$，故根據夾擠定理可知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}h_n=0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+h_n)=1$$

(b) 因 $n\to\infty$，則 $n^2+1>1$，故 $\sqrt[n]{n^2+1}>\sqrt[n]{1}=1$，因此

$$\exists\, h_n>0 \;\text{ 使得 }\; \sqrt[n]{n^2+1}=1+h_n$$

則

$$n^2+1=(1+h_n)^n>\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,h_n^3$$

兩端乘上 $\dfrac{6}{n(n-1)(n-2)}$, 可得

$$h_n^3<\frac{6(n^2+1)}{n(n-1)(n-2)}$$

故

$$0<h_n<\sqrt[3]{\frac{6(n^2+1)}{n(n-1)(n-2)}}$$

又 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{6(n^2+1)}{n(n-1)(n-2)}}=0$，故根據夾擠定理可知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}h_n=0$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}(1+h_n)=1$$

18. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$, 試證下列極限

(a) $\lim\limits_{n\to-\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

《証》 ☞

(a) 令 $m=-n$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to-\infty}(1+\frac{1}{n})^n &= \lim_{m\to\infty}(1-\frac{1}{m})^{-m}=\lim_{m\to\infty}(\frac{m-1}{m})^{-m}\\ &= \lim_{m\to\infty}(\frac{m}{m-1})^m=\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m-1})^m\\ &\quad (\text{ 令 } k=m-1\ )\\ &= \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^{k+1}=\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^k\cdot(1+\frac{1}{k})\\ &= e\cdot 1=e\end{aligned}$$

(b) 因 $x\to\infty$, 故 $n\le x<n+1$, 因此 $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$, 則

$$(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{x})^n\le(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{x})^{n+1}\le(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

又

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n &= \lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^{m-1}\\ &\quad (\text{令 } m=n+1\ )\\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{m})^m}{1+\frac{1}{m}}\\ &= \frac{e}{1}=e\end{aligned}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot(1+\frac{1}{n})=e\cdot 1=e$$

故由夾擠定理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

挑戰範例

1. $0<r<1$，試證 (a) $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot r^n = 0$。 《政大經濟》

《証》 ☞

(a) 因 $0<r<1$，故 $\exists\, h>0$，使得 $r=\dfrac{1}{1+h}$，則

$$0<r^n=\frac{1}{(1+h)^n}<\frac{1}{nh}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{nh}=0$，故根據夾擠定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$

(b) 因 $0<r<1$，故 $\exists\, h>0$，使得 $r=\dfrac{1}{1+h}$，則

$$0<n\cdot r^n=\frac{n}{(1+h)^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2!}h^2}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{n(n-1)}{2!}h^2}=0$，故根據夾擠定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot r^n=0$

2. 設 $k>0$，試證 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1$

《証》 ☞

(1) $k=1$：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$$

(2) $k>1$：

$\sqrt[n]{k} > \sqrt[n]{1} = 1$，則

$$\exists\, h_n > 0 \ \text{使得}\ \sqrt[n]{k} = 1 + h_n$$

故 $k = (1+h_n)^n > nh_n$，則

$$0 < h_n < \frac{k}{n}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n} = 0$，根據夾擠定理可知

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+h_n) = 1$

(3) $0 < k < 1$：

$\frac{1}{k} > 1$，故由 (2) 可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 1$，即 $\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k}} = 1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$

故由 (1)、(2)、(3) 知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$

3. 試證下列極限

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + y^n + z^n} = x$；$(x > y > z > 0)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n + n} = e$

《証》 ☞

(a) 因 $x > y > z > 0$，故 $x^n < x^n + y^n + z^n < 3x^n$，則

$$x < \sqrt[n]{x^n + y^n + z^n} < \sqrt[n]{3}\, x$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{3}\, x) = x$，故根據夾擠定理可知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + y^n + z^n} = x = \max\{x, y, z\}$$

(b) 因 $e^n > n$，故 $e^n < e^n + n < 2e^n$，則

$$e < \sqrt[n]{e^n + n} < \sqrt[n]{2}e$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{2}e) = e$，故根據夾擠定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n + n} = e$

4. 求下列極限

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x^2}}{5^{x^3}}$　　(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^{x^2}}{2^{x^3}}$

《解》 ☞

(a) 因 $x\to\infty$，故

$$0<\frac{2^{x^2}}{5^{x^3}}=\frac{2^{x^2}}{(5^x)^{x^2}}<\frac{2^{x^2}}{5^{x^2}}=(\frac{2}{5})^{x^2}\quad(\because\ 5^x>5^1)$$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2}{5})^{x^2}=0$，故根據夾擠定理知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x^2}}{5^{x^3}}=0$

(b) 因 $x\to\infty$，故

$$0<\frac{5^{x^2}}{2^{x^3}}=\frac{5^{x^2}}{(2^x)^{x^2}}<\frac{5^{x^2}}{(2^3)^{x^2}}=(\frac{5}{8})^{x^2}\quad(\because\ 2^x>2^3)$$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{5}{8})^{x^2}=0$，故根據夾擠定理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^{x^2}}{2^{x^3}}=0$

5. 設 $(x^2+2x-3)f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\tan^{-1}(x^2-1)$ 滿足

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$　　(b) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$

試求 a、b、c、d。

《解》 ☞ 因

$$f(x)=\frac{ax^3+bx^2+cx+d\tan^{-1}(x^2-1)}{x^2+2x-3}\tag{1}$$

由

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}f(x)&=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d\tan^{-1}(x^2-1)}{x^2+2x-3}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b+\dfrac{c}{x}+d\dfrac{\tan^{-1}(x^2-1)}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}=1\end{aligned}$$

可得 $a = 0$ 、$b = 1$, 代回 (1) 式中 , 可得 $f(x)$ 為

$$f(x) = \frac{x^2 + cx + d\tan^{-1}(x^2 - 1)}{x^2 + 2x - 3} \tag{2}$$

又由已知 $\lim_{x\to1} f(x) = 2$, 且 $\lim_{x\to1}(x^2 + 2x - 3) = 0$, 可知

$$\lim_{x\to1}[x^2 + cx + d\tan^{-1}(x^2 - 1)] = 1 + c = 0$$

故可求得 $c = -1$, 代回 (2) 式中 , 可得 $f(x)$ 為

$$f(x) = \frac{x^2 - x + d\tan^{-1}(x^2 - 1)}{x^2 + 2x - 3}$$

再由

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1} f(x) &= \lim_{x\to1} \frac{x^2 - x + d\tan^{-1}(x^2 - 1)}{x^2 + 2x - 3} \\
&= \lim_{x\to1}\left[\frac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 3} + d\cdot\frac{\tan^{-1}(x^2 - 1)}{x^2 - 1}\cdot\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}\right] \\
&= \lim_{x\to1}\left[\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+3)} + d\cdot\frac{\tan^{-1}(x^2 - 1)}{x^2 - 1}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}\right] \\
&= \lim_{x\to1}\left[\frac{x}{x+3} + d\frac{\tan^{-1}(x^2 - 1)}{x^2 - 1}\cdot\frac{x+1}{x+3}\right] \\
&= \frac{1}{4} + \frac{d}{2} = 2
\end{aligned}$$

故 $d = \dfrac{7}{2}$

精選習題

1. 求 (a) $\lim\limits_{x\to 4^+}[[x]]$ (b) $\lim\limits_{x\to 1^+}([x]^2-[x^2])/(x^2-1)$ 《交大》

《解》☞ ：(a) 4 (b) 0

2. $\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{1}{x}]x$

《解》☞ ：0

3. $\lim\limits_{x\to n}[x-[x]]$ 及 $\lim\limits_{x\to n}[[x]-x]$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$ 《交大》

《解》☞ ：0 及 -1

4. $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x^3}]x^5$ 《成大》

《解》☞ ：0

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+3}{[2x+1]}$

《解》☞ ：$\dfrac{5}{2}$

6. 求 $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x|x-2|}{x-2}$

《解》☞ ：-2

7. $\lim\limits_{t\to 1^+}\dfrac{|1-t|}{1-t}$ 《政大經濟》

《解》☞ ：-1

8. $\lim\limits_{x\to 0}x^3\sin\dfrac{1}{x}$ 《政大商院》

《解》☞ ：0

9. Let $f(x)=x^2\{1-\cos\dfrac{3}{x}\}$, $x\neq 0$. Evaluate the limit. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. 《台綜大B》

《解》☞ ：0

10. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,e^{\sin\frac{\pi}{x}}$ 《政大經濟》

《解》☞ ：0

11. 求 $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{[x+1]+|x|}{x}$

《解》 ☞ ： -1

12. 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$ 其中 $f(x) = \begin{cases} x^2 & ;\text{若 } x \text{ 爲有理數} \\ x^4 & ;\text{若 } x \text{ 爲無理數} \end{cases}$ 《成大》

《解》 ☞ ： 0

13. 求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，若已知當 $x \neq 1$ 時，$\left|\dfrac{f(x)}{x-1}\right| \leq 1$

《解》 ☞ ： 0

14. If $\lim\limits_{x\to 0} [\dfrac{f(x)}{x}]$ exist , prove that $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.$

《解》 ☞ ： 証明題

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{x}$

《解》 ☞ ： 0

16. $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{2^n\, 3^n}{n!}$ 《政大經濟》

《解》 ☞ ： 0

17. 求 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{(1-\dfrac{1}{x})^x}.$ 《交大》

《解》 ☞ ： e

18. $\lim\limits_{n\to \infty} (3^n + 5^n + 7^n)^{\frac{1}{n}}$

《解》 ☞ ： 7

19. $\lim\limits_{x\to \infty} (1^x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$ 《中興財金》

《解》 ☞ ： 2

1.3 ϵ 、δ 的極限定義

1.3.1 概論

1. 常見的數學符號

(1) ϵ 、δ 表任意微小正實數 。M 、K 表任意很大正實數 。

(2) 對稱鄰近區域 (symmetric neighborhood)

$$N_\epsilon(\ell) = (\ell-\epsilon, \ell+\epsilon) = \{f(x)\,|\,\ell-\epsilon < f(x) < \ell+\epsilon\} = \{f(x)\,|\,|f(x)-\ell| < \epsilon\}$$

(3) 去心對稱鄰近區域 (deleted symmetric neighborhood)

$$\begin{aligned} N_\delta^\star(a) &= N'_\delta(a) = (a-\delta\,,\,a)\cup(a\,,\,a+\delta) \\ &= \{x\,|\,a-\delta < x < a \text{ 或 } a < x < a+\delta\} \\ &= \{x\,|\,0 < |x-a| < \delta\} \end{aligned}$$

(4) $\forall$: for all (所有的) ; $\ni$: such that (使得 s.t.) ; $\exists$: exist (存在)

2. 基本工具

(1) 以一多項式來表示另一多項式 。

(2) $0 < \delta \le 1 \;\Rightarrow\; \delta^n \le \delta \;\;;\;\; (n \in \mathbb{N})$

(3) $N'_{\delta_1}(a) \cap N'_{\delta_2}(a) = N'_\delta(a)$, 其中 $\delta = \min\{\delta_1\,,\,\delta_2\}$

(4) $[k_1\,,\,\infty) \cap [k_2\,,\,\infty) = [k\,,\,\infty)$, 其中 $k = \max\{k_1\,,\,k_2\}$

(5) $||x|-|y|| \le |x \pm y| \le |x|+|y|$, $|x \pm y \pm z| \le |x|+|y|+|z|$

1.3.2 定義*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

$$\forall\,\epsilon > 0\,,\,\exists\,\delta > 0\,,\,\ni\;\; 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-\ell| < \epsilon\,(\text{ 或 } k\epsilon\,,\,k > 0\,)$$

---

*微積分約在1670年代左右誕生的, 在當時極限的定義，在邏輯上並不是很嚴謹，大部分的數學家都是以直觀的意義在求解 。最早提出極限精確定義是波希米亞 (現在的捷克) 的數學家 Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (Oct 1781 ~ Dec 1848) , 接下來法國的數學家 Augustin Louis Cauchy (Aug 1789 ~ May 1857) 再提出與現在幾乎相同形式的定義， 而我們現在所用的極限精確定義是由德國的數學家 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Oct 1815 ~ Feb 1897) 在1860年所提出的 。

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

$$\forall\ M > 0\,,\ \exists\ \delta > 0\,,\ \ni\ \ 0 < |x-a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x)| > M$$

3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$

$$\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ K > 0\,,\ \ni\ \ |x| \geq K\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon$$

1.3.3 極限的証明

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

(1) 己知 $\forall \epsilon > 0$ 均 $\exists \delta > 0$

(2) 滿足

(a) $0 < |x-a| < \delta$

(b) $|f(x) - \ell| < g(\delta) \leq \epsilon$

(3) 由 (2) 的 $g(\delta) \leq \epsilon$ 找到適當的 $\delta(\epsilon)$

2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$

(1) 己知 $\forall \epsilon > 0$ 均 $\exists K > 0$

(2) 滿足

(a) $|x| > K$

(b) $|f(x) - \ell| < g(K) \leq \epsilon$

(3) 由 (2) 找到適當的 $K(\epsilon)$

3. $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

(1) 已知 $\forall M > 0$ 均 $\exists \delta > 0$

(2) 滿足

(a) $0 < |x - a| < \delta$

(b) $|f(x)| > g(\delta) \geq M$

(3) 由 (2) 找到適當的 $\delta(M)$

4. $\lim_{x \to a} f(x)$ 不存在

先假設 $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, 再由定義探討出 $\lim_{x \to a} f(x)$ 的極限不唯一 , 即可求証函數的極限不存在 。

精選範例

1. 試證 $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$

《証》 ☞ $\forall\ \epsilon>0$, $\exists\ \delta \le \dfrac{\epsilon}{2}$, $\ni 0<|x-2|<\delta$, 則

$$|2x+1-5|=|2x-4|=2|x-2|<2\delta\le\epsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$

2. Given an $\epsilon-\delta$ proof of the fact that $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)=1$.

《証》 ☞ $\forall\ \epsilon>0$, $\exists\delta \le \dfrac{\epsilon}{2}$, $\ni\ 0<|x-2|<\delta$, 則

$$|2x-3-1|=|2x-4|=2|x-2|<2\delta\le\epsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)=1$

3. 試證 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$

《証》 ☞ $\forall\ \epsilon>0$, $\exists\ \delta \le 2\epsilon$, $\ni 0<|x-3|<\delta$, 則

$$|\sqrt{x+1}-2|=\left|\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}\right|<\frac{\delta}{2}\le\epsilon \quad (\ \because\ \sqrt{x+1}>0)$$

故 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$

4. 試證 $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2)=3$

《提示》 ➥ 以一多項式來表示另一多項式

《証》 ☞ $\forall\ \epsilon>0$，$\exists\ \delta\leq$ $\min\{1,\dfrac{\epsilon}{13}\}$，$\ni 0<|x-1|<\delta$ ≤ 1，則

$$\begin{aligned}|x^3+2x^2-3| &= |(x-1)^3+5(x-1)^2+7(x-1)|\\ &\leq |x-1|^3+5|x-1|^2+7|x-1|\\ &< \delta^3+5\delta^2+7\delta\\ &\leq \delta+5\delta+7\delta\\ &= 13\delta\leq\epsilon\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+2x^2)=3$

5. Use the precise definition to show that $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+9x+2)=13$.

《証》 ☞ $\forall\ \epsilon>0$，$\exists\,\delta\leq$ $\min\left\{1,\dfrac{\epsilon}{23}\right\}$，$\ni\ 0<|x-1|<\delta$ ≤ 1，則

$$\begin{aligned}|2x^3+9x+2-13| &= |2(x-1)^3+6(x-1)^2+15(x-1)|\\ &\leq 2|x-1|^3+6|x-1|^2+15|x-1|\\ &< 2\delta^3+6\delta^2+15\delta\\ &< 2\delta+6\delta+15\delta\\ &< 23\delta\leq\epsilon\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+9x+2)=13$

6. 試證 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{3x+2}=\dfrac{2}{5}$

《証》 ☞ $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta \le$ $\min\{1\,,\,10\epsilon\}$, $\ni 0 < |x-1| < \delta$ ≤ 1 , 則

$$\left|\frac{x+1}{3x+2} - \frac{2}{5}\right| = \frac{|-x+1|}{5|3x+2|} = \frac{|x-1|}{5|3x+2|} < \frac{|x-1|}{5\cdot 2} < \frac{\delta}{10} \le \epsilon$$

$\because\ |x-1| < 1$, 則 $-1 < x-1 < 1$, 故 $0 < x < 2$, 則

$$0 < 3x < 6 \ \Rightarrow\ 2 < 3x+2 < 8$$

故 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{3x+2} = \frac{2}{5}$

7. 試證 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3+1}{x-1} = 9$

《証》 ☞ $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta \le$ $\min\{\frac{1}{2}\,,\,\frac{\epsilon}{20}\}$, $\ni 0 < |x-2| < \delta$ $\le \frac{1}{2}$, 則

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3+1}{x-1} - 9\right| &= \left|\frac{x^3-9x+10}{x-1}\right| \\ &= \left|\frac{(x-2)^3+6(x-2)^2+3(x-2)}{x-1}\right| \\ &\le \frac{|x-2|^3+6|x-2|^2+3|x-2|}{|x-1|} \\ &< \frac{\delta^3+6\delta^2+3\delta}{\frac{1}{2}} \\ &< 20\delta \le \epsilon\end{aligned}$$

$\because\ |x-2| < \frac{1}{2}$, 故 $-\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2}$, 則

$$\frac{1}{2} < x-1 < \frac{3}{2}$$

故 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3+1}{x-1} = 9$ 。

Note : 如取 $\delta \le 1$, 則 $|x-2| < 1$, 即 $0 < x-1 < 2$, 無法縮小分母 。

8. 設 $f(x) = \begin{cases} x^3 & ;\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ;\ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$, 試證 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

《提示》 ➥ 1. 使用極限定義。 2. 使用夾擠定理

《証》 ☞

法1： $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta \leq \sqrt[3]{\epsilon}$, $\ni 0 < |x-0| < \delta$, 則

$$|f(x)-0| = |f(x)| \leq |x^3| = |x-0|^3 < \delta^3 \leq \epsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

法2： 因 $0 \leq |f(x)| \leq |x^3|$, 又 $\lim\limits_{x\to 0} |x^3| = 0$, 故根據夾擠定理可知

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = 0$$

即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

9. 若 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $\forall\ 0 < |x-a| < \delta_0$, 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$, 則 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, 試證之。

《提示》 ➥ 本題為夾擠定理之證明

《証》 ☞

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$, 由極限的定義可知

$$\forall\ \epsilon > 0\ ,\ \exists\ \delta_1 > 0\ ,\ \ni 0 < |x-a| < \delta_1$$

則 $|g(x)-\ell| < \epsilon$, 即

$$\ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon$$

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$, 由極限的定義可知

$$\forall\ \epsilon > 0\ ,\ \exists\ \delta_2 > 0\ ,\ \ni 0 < |x-a| < \delta_2$$

則 $|h(x)-\ell| < \epsilon$, 即

$$\ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon$$

(3) 已知 $0 < |x-a| < \delta_0$ 時 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

(4) 由 (1)、(2)、(3) 知

$$\forall\ \epsilon > 0\ ,\ \exists\ \delta \leq \min\{\delta_0\ ,\ \delta_1\ ,\ \delta_2\}\ ,\ \ni 0 < |x-a| < \delta$$

則

$$\ell - \epsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < \ell + \epsilon$$

即 $|f(x) - \ell| < \epsilon$，故 $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

10. 證明：若 $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$，則 $\lim_{x\to c} |f(x)| = |\ell|$ 《文化管研》

《証》 ☞ 已知 $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$，故

$$\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ \delta_1 > 0\,,\ \ni 0 < |x - c| < \delta_1\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon$$

由上面可知

$$\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ \delta \le \delta_1\,,\ \ni 0 < |x - c| < \delta$$

則

$$||f(x)| - |\ell|| \le |f(x) - \ell| < \epsilon$$

故 $\lim_{x\to c} |f(x)| = |\ell|$

注意： 本命題其逆不真，可舉反例如下：設 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$，則

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

因 $\lim_{x\to 0^-} f(x) \ne \lim_{x\to 0^+} f(x)$，故 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在，但

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{|x|} = 1$$

故其逆命題不真。

11. 試證 $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$，則 $\lim_{x\to c} f(x) = 0$

《証》 ☞ 已知 $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=0$, 由定義可知

$$\forall\ \epsilon>0\,,\ \exists\ \delta_1>0\,,\ \ni 0<|x-c|<\delta_1\ \Rightarrow\ ||f(x)|-0|<\epsilon$$

由上面可知

$$\forall\ \epsilon>0\,,\ \exists\ \delta\le\delta_1\,,\ \ni 0<|x-c|<\delta$$

則

$$|f(x)-0|=|f(x)|=||f(x)|-0|<\epsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$

12. 若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\ell_1$ 、$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\ell_2$, 試證 $\ell_1=\ell_2$

《提示》 ➥ 本題爲極限唯一性 (uniqueness) 之證明

《証》 ☞

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\ell_1$, 由定義可知

$$\forall\ \epsilon>0\,,\ \exists\ \delta_1>0\,,\ \ni 0<|x-c|<\delta_1\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell_1|<\epsilon$$

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\ell_2$, 由定義可知

$$\forall\ \epsilon>0\,,\ \exists\ \delta_2>0\,,\ \ni 0<|x-c|<\delta_2\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell_2|<\epsilon$$

(3) 令 $\ell_1\neq\ell_2$ (反証) , 由 (1) 、(2) 知

$$\forall\ \epsilon>0\,,\ \exists\ \delta\le\min\{\delta_1\,,\ \delta_2\}\,,\ \ni 0<|x-c|<\delta$$

則

$$\begin{aligned}|\ell_1-\ell_2| &= |\ell_1-f(x)+f(x)-\ell_2|\\ &= |(f(x)-\ell_2)-(f(x)-\ell_1)|\\ &\le |f(x)-\ell_2|+|f(x)-\ell_1|\\ &< \epsilon+\epsilon=2\epsilon\end{aligned}$$

但現取 $\epsilon=\dfrac{1}{2}|\ell_1-\ell_2|>0$, 則 $|\ell_1-\ell_2|=2\epsilon$, 與 $|\ell_1-\ell_2|<2\epsilon$ 矛盾 , 故 $\ell_1=\ell_2$

13. 設 $f(x)=\begin{cases}2 & ;\, x\in\mathbb{Q}\\ -1 & ;\, x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$，試證 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 不存在。 《政大數學、台大》

《提示》 ➥ 使用反證法

《証》 ☞ 設 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\ell$，由定義可知

$$\forall\,\epsilon>0\,,\,\exists\,\delta>0\,,\,\ni 0<|x-c|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\epsilon$$

取 $\epsilon=\dfrac{3}{2}>0$，則 $\exists\,\delta_1>0\,,\,\ni 0<|x-c|<\delta_1\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|<\dfrac{3}{2}$

(1) $x\in\mathbb{Q}$，$0<|x-c|<\delta_1$，則

$$|f(x)-\ell|=|2-\ell|<\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ |\ell-2|<\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}<\ell<\frac{7}{2}$$

(2) $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$，$0<|x-c|<\delta_1$，則

$$|f(x)-\ell|=|-1-\ell|<\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ |\ell+1|<\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ -\frac{5}{2}<\ell<\frac{1}{2}$$

(3) 由 (1)、(2) 可知，不滿足極限唯一性，故 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 不存在

14. 試證 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。

《提示》 ➥ 使用反證法

《証》 ☞ 設 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=\ell$，由定義可知

$$\forall\,\epsilon>0\,,\,\exists\,\delta>0\,,\,\ni 0<|x-0|<\delta\ \Rightarrow\ \left|\sin\frac{1}{x}-\ell\right|<\epsilon$$

取 $\epsilon=1>0$，則 $\exists\,\delta_1>0\,,\,\ni 0<|x-0|<\delta_1\ \Rightarrow\ \left|\sin\dfrac{1}{x}-\ell\right|<1$

(1) $\dfrac{1}{x}=2m\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$\exists\,m\in\mathbb{Z}\,,\,\ni 0<|x-0|<\delta_1$，則

$$\left|\sin\frac{1}{x}-\ell\right|=\left|\sin(2m\pi+\frac{\pi}{2})-\ell\right|=|1-\ell|<1\ \Rightarrow\ 0<\ell<2$$

(2) $\dfrac{1}{x} = 2n\pi - \dfrac{\pi}{2}$, $\exists\, n \in \mathbb{Z}$, $\ni 0 < |x - 0| < \delta_1$, 則

$$\left|\sin\frac{1}{x} - \ell\right| = \left|\sin(2n\pi - \frac{\pi}{2}) - \ell\right| = |-1-\ell| < 1 \;\Rightarrow\; -2 < \ell < 0$$

(3) 由 (1)、(2) 可知，不滿足極限唯一性，故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在

15. Prove that if $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, then $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cb$ for every positive constant c.

《証》 ☞ 已知 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, 由定義可知

$$\forall\, \epsilon > 0\,,\, \exists\, \delta > 0\,,\, \ni 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \epsilon$$

因 $c > 0$, 故

$$c|f(x) - b| = |c\,f(x) - cb| < c\epsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to a} c\,f(x) = cb$

挑 戰 範 例

1. 設 $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$，試證 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

《提示》 ➥ 1. 使用極限定義。2. 使用夾擠定理

《証》 ☞

法1：$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta \leq\ \epsilon,\ \ni 0 < |x-0| < \delta$，則

$$\left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| = |x-0| < \delta \leq \epsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

法2：因 $0 \leq |f(x)| = \left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq |x|$，因 $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$，故根據夾擠定理可知

$$\lim_{x\to 0}|f(x)| = 0$$

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

2. 試證 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^p} = 0$，$p > 0$

《証》 ☞ $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ K \geq\ (\dfrac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{p}},\ \ni x > K$，則

$$|\frac{1}{x^p} - 0| = |\frac{1}{x}|^p < \frac{1}{K^p} \leq \epsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^p} = 0$

3. 試證 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^p} = \infty$, $p > 0$

《證》 ☞ $\forall\ M > 0$, $\exists\ \delta \leq \left(\dfrac{1}{M}\right)^{\frac{1}{p}}$, $\ni 0 < |x - 0| < \delta$, 則

$$\left|\frac{1}{x^p}\right| > \frac{1}{\delta^p} \geq M$$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^p} = \infty$

4. 若 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $\forall\ x > k_0$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \ell$,
則 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$, 試證之 。

《提示》 ➥ 本題爲夾擠定理之證明

《證》 ☞

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \ell$, 由極限的定義可知

$$\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ k_1 > 0\,,\ \ni x > k_1$$

則 $|g(x) - \ell| < \epsilon$, 即 $\ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon$

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \ell$, 由極限的定義可知

$$\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ k_2 > 0\,,\ \ni x > k_2$$

則 $|h(x) - \ell| < \epsilon$, 即 $\ell - \epsilon < h(x) < \ell + \epsilon$

(3) 已知 $\forall\ x > k_0$ 時 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

(4) 由 (1)、(2)、(3) 可知

$$\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ k \geq \max\{k_0\,,\ k_1\,,\ k_2\}\,,\ \ni x > k$$

則

$$\ell - \epsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < \ell + \epsilon$$

即 $|f(x) - \ell| < \epsilon$, 故 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$

5. 設 $a(x) = \min\{b(x)\,,\,c(x)\}$ 且 $A(x) = \max\{b(x)\,,\,c(x)\}$,

若 $\lim\limits_{x\to d} b(x) = \lim\limits_{x\to d} c(x) = \ell$, 則 $\lim\limits_{x\to d} a(x) = \lim\limits_{x\to d} A(x) = \ell$, 試證之 。

《提示》 ➥ $\min\{b(x)\,,\,c(x)\} = \dfrac{b(x)+c(x)-|b(x)-c(x)|}{2}$

$$\max\{b(x)\,,\,c(x)\} = \frac{b(x)+c(x)+|b(x)-c(x)|}{2}$$

《証》 ☞

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to d} b(x) = \ell$, 則

$$\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ \delta_1 > 0\,,\ \ni 0 < |x-d| < \delta_1\ \Rightarrow\ |b(x) - \ell| < \epsilon$$

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to d} c(x) = \ell$, 則

$$\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ \delta_2 > 0\,,\ \ni 0 < |x-d| < \delta_2\ \Rightarrow\ |c(x) - \ell| < \epsilon$$

(3) $\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ \delta \le \min\{\delta_1\,,\,\delta_2\}\,,\ \ni 0 < |x-d| < \delta$, 則

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{b(x)+c(x)\pm|b(x)-c(x)|}{2} - \ell\right| \\
= & \left|\frac{(b(x)-\ell)+(c(x)-\ell)\pm|(b(x)-\ell)-(c(x)-\ell)|}{2}\right| \\
\le & \ \frac{2|b(x)-\ell| + 2|c(x)-\ell|}{2} < 2\epsilon \quad (\text{由 (1)、(2) 得知})
\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x\to d} a(x) = \lim\limits_{x\to d} A(x) = \ell$

6. 若 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell_1$ 、$\lim\limits_{x\to c} g(x) = \ell_2$, 試證 $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = \ell_1\ell_2$

《証》☞

(1) 已知 $\lim_{x\to c} f(x) = \ell_1$，由定義可知

$$\forall\, \epsilon > 0\,,\ \exists\, \delta_1 > 0\,,\ \ni 0 < |x-c| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell_1| < \epsilon$$

(2) 已知 $\lim_{x\to c} g(x) = \ell_2$，由定義可知

$$\forall\, \epsilon > 0\,,\ \exists\, \delta_2 > 0\,,\ \ni 0 < |x-c| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |g(x) - \ell_2| < \epsilon$$

(3) $\forall\, \epsilon > 0\,,\ \exists\, \delta \le \min\{\delta_1\,,\ \delta_2\}\,,\ \ni 0 < |x-c| < \delta$，則

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |(f(x)-\ell_1)(g(x)-\ell_2) + f(x)\ell_2 + g(x)\ell_1 - 2\ell_1\ell_2| \\
&= |(f(x)-\ell_1)(g(x)-\ell_2) + \ell_2(f(x)-\ell_1) + \ell_1(g(x)-\ell_2)| \\
&\le |f(x)-\ell_1||g(x)-\ell_2| + |\ell_2||f(x)-\ell_1| + |\ell_1||g(x)-\ell_2| \\
&< \epsilon^2 + |\ell_2|\epsilon + |\ell_1|\epsilon \quad (\text{由 (1)、(2) 得知}) \\
&= (\epsilon + |\ell_2| + |\ell_1|)\epsilon
\end{aligned}$$

故 $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \ell_1\ell_2$

7. 若 $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$，則 $\lim_{x\to c} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$，$\ell \neq 0$，試證之。

《証》☞

(1) 已知 $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$，由定義可知

$$\forall\, \epsilon > 0\,,\ \exists\, \delta_1 > 0\,,\ \ni 0 < |x-c| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \epsilon$$

(2) 取 $\epsilon = \dfrac{|\ell|}{2} > 0\,,\ \exists\, \delta_2 > 0\,,\ \ni 0 < |x-c| < \delta_2$，則

$$|f(x) - \ell| < \frac{|\ell|}{2} \ \Rightarrow\ \frac{|\ell|}{2} < |f(x)| < \frac{3|\ell|}{2}$$

(3) $\forall\, \epsilon > 0\,,\ \exists\delta \le \min\{\delta_1\,,\ \delta_2\}\,,\ \ni 0 < |x-c| < \delta$，則

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| &= \left|\frac{\ell - f(x)}{f(x)\ell}\right| = \frac{|f(x)-\ell|}{|f(x)||\ell|} \quad (\text{由 (1)、(2) 可知}) \\
&< \frac{\epsilon}{\frac{|\ell|}{2}|\ell|} = \frac{2}{|\ell|^2}\epsilon
\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\ell}$

8. Prove $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ does not exist.

《証》 ☞ 令

$$f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$$

設 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\ell$, 由定義可知

$$\forall\,\epsilon>0\,,\,\exists\,\delta>0\,,\,\ni\ \ 0<|x-1|<\delta\ \Rightarrow\ \Big|f(x)-\ell\Big|<\epsilon$$

當 $\delta>0$, $x_1\in(1-\delta\,,\,1)$ 時 $f(x_1)=-1$, $x_2\in(1\,,\,1+\delta)$ 時 $f(x_2)=1$, 現取 $\epsilon=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}2 &= |f(x_1)-f(x_2)|=|\{f(x_2)-\ell\}-\{f(x_1)-\ell\}|\\ &\le |f(x_2)-\ell|+|f(x_1)-\ell|<\epsilon+\epsilon=1\end{aligned}$$

矛盾 , 故 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ 不存在

9. If n is an integer , prove $\lim\limits_{x\to n}[x]$ does not exist. Where $[x]$ is the greatest integer function.

《証》 ☞ 設 $\lim\limits_{x\to n}[x]=\ell$, 由定義可知

$$\forall\,\epsilon>0\,,\,\exists\,\delta>0\,,\,\ni\ \ 0<|x-n|<\delta\ \Rightarrow\ |[x]-\ell|<\varepsilon$$

令 $n-\delta<x_2<n<x_1<n+\delta$, 則 $[x_1]=n$ 、$[x_2]=n-1$, 故 $|[x_1]-[x_2]|=1$, 取 $\epsilon=\dfrac{1}{2}$

$$1=|[x_1]-[x_2]|=|\{[x_1]-\ell\}-\{[x_2]-\ell\}|\le|[x_1]-\ell|+|[x_2]-\ell|<\epsilon+\epsilon=1$$

即 $1<1$ 矛盾 , 故 $\lim\limits_{x\to n}[x]$ 不存在

精選習題

1. Show that $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$. 《彰師大數學》

《解》☞ : $\delta \le \dfrac{\epsilon}{2}$

2. Find the limit ℓ of $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}$. Then use the $\epsilon-\delta$ definition to prove that the limit is ℓ. 《政大數學一》

《解》☞ : $\ell = 2$ 且 $\delta \le 2\epsilon$

3. Use the $\epsilon-\delta$ definition to prove that $\lim\limits_{x\to -4}(x^2+4x)=0$. 《政大數學一》

《解》☞ : $\delta \le \min\{1\,,\,\dfrac{\epsilon}{5}\}$

4. Prove $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=5$ using the ϵ - δ definition of a limit. 《北大資訊、通訊》

《解》☞ : $\delta \le \epsilon$

5. Show that $\lim\limits_{x\to 1}(x^4+3x^3+1)=5$.

《解》☞ : $\delta \le \min\{1\,,\,\dfrac{\epsilon}{36}\}$

6. Let f be a function defined as 《政大數學一》

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{, if } x \text{ is rational} \\ 1 & \text{, if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

Prove rigorously that $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ does not exist for any $c\in\mathbb{R}$.

《解》☞ : 取 $\epsilon=\dfrac{1}{2}>0$

1.4 連續

1.4.1 定義

1. 基本定義：函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處，滿足

(1) $f(a)$ 存在

(2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

則稱爲函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處爲連續。

2. 等價定義：設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處爲連續。

(1) $\lim\limits_{x \to a}\{f(x)-f(a)\}=0$

(2) $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

(3) $\lim\limits_{h \to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=0$

(4) $\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ \delta > 0\,,\ \ni\ |x-a|<\delta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)|<\epsilon$

(a) 若 $\forall a \in I$ 且 $\delta=\delta(\epsilon)$ 僅與 ϵ 有關與 x 無關時，稱爲均勻連續。

(b) 若 $\forall a \in I$ 且 $\delta=\delta(\epsilon, x)$ 時，稱爲點態連續。

1.4.2 基本性質

1. 設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處爲連續，則 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x) = f(a)$

2. 設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處爲連續，且 $\lim\limits_{x \to b} g(x) = a$，則 $\lim\limits_{x \to b} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to b} g(x)) = f(a)$。

3. 函數 $f(x)$ 於區間 I 中均爲連續的函數，則 $f(x)$ 在 I 中圖形連續不斷。

4. 函數 $f(x)$ 在定義域內均爲連續的函數，則稱爲連續函數。任何初等函數均爲連續函數。

5. 連續函數經過四則運算後，仍爲連續函數。設 D_f、D_g 分別爲函數$f(x)$、$g(x)$的定義域。

(1) $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$, $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

(2) $D_{f/g} = (D_f \cap D_g) \backslash \{x | g(x)=0\}$

精選範例

1. Given $f(x)=\begin{cases} x^2 & ;\text{ if } x\neq 2 \\ 7 & ;\text{ if } x=2 \end{cases}$ is f continuous at $x=2$?

《提示》 ➥ 連續基本定義：$f(x)$ 在 $x=a$ 爲連續，必須滿足

(1) $f(a)$ 存在

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

《証》 ☞

(1) $f(2)=7$

(2) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

(3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$

故 $f(x)$ 在 $x=2$ 處不連續。

2. 設 $f(x)=\begin{cases} x+1 & ;\ -1\leq x\leq 1 \\ 2 & ;\ 1<x\leq 3 \end{cases}$，試討論 f 之連續性。

《解》 ☞

(1) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x+1)=0=f(-1)$，則 f 在 $x=-1$ 爲右連續。

(2) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 2=2=f(3)$，則 f 在 $x=3$ 爲左連續。

(3)

(a) $f(1)=1+1=2$

(b) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2=2$，故

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$，則 f 在 $x=1$ 為連續。

(4) f 於 $[-1,3]$ 內且 $x\neq -1$、1、3 時為連續。

由 (1) ~ (4) 知 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 均為連續。

---

3. 設 $f(x)=\begin{cases}1 & ;\ x\neq 0\\ -1 & ;\ x=0\end{cases}$、$g(x)=x^2$，試問下列是否成立

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to 0} g(x))$　　(b) $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))=g(\lim\limits_{x\to 0} f(x))$

《解》 ☞

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))=\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)=\lim\limits_{x\to 0} 1=1$

$f(\lim\limits_{x\to 0} g(x))=f(\lim\limits_{x\to 0} x^2)=f(0)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))\neq f(\lim\limits_{x\to 0} g(x))$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))=\lim\limits_{x\to 0} g(1)=\lim\limits_{x\to 0} 1^2=1$

$g(\lim\limits_{x\to 0} f(x))=g(\lim\limits_{x\to 0} 1)=g(1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))=g(\lim\limits_{x\to 0} f(x))$ 成立

---

4. 設 $f(x)=\begin{cases}2\cos x & ;\ x<0\\ x+a & ;\ 0\leq x\leq 1\\ x^2-bx & ;\ x>1\end{cases}$，若 $f(x)$ 為連續函數，試求 a、b。

《解》 ☞ $f(x)$ 於 $x=0$ 為連續，則

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0^-} 2\cos x=0+a$$

故 $a=2$，$f(x)$ 於 $x=1$ 為連續，則

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1^+}(x^2-bx)=1+a$$

故 $1-b=3$，則 $b=-2$

5. Suppose that the function $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}} & ;\ x\neq 1 \\ 4 & ;\ x=1 \end{cases}$ is continuous at $x=1$. Then $(a\,,\,b)=$ ______ 《台綜大C》

《解》☞ 因 $f(x)$ 在 $x=1$ 時為連續，故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=4$，即

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}=4 \tag{1}$$

由 (1) 式可知，$x\to 1$ 時，分子必須為 0，故可得

$$a+b=0 \tag{2}$$

且

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{ax+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}} &= \lim_{x\to 1}\frac{(ax+b)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}{(3x+1)-(x+3)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(ax-a)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})}{2x-2} \\ &= \frac{a(2+2)}{2}=2a=4\end{aligned}$$

故 $a=2$、$b=-2$，即 $(a\,,\,b)=(2\,,\,-2)$

6. Find the values of A and B that make the function $f(x)$ continuous every where

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & ;\ x<2 \\ Ax^2-Bx+3 & ;\ 2\leq x<3 \\ 2x-A+B & ;\ x\geq 3 \end{cases}$$

《成大企管所》

《解》 ☞ 因為 $f(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 為連續函數，故

$$f(2^-) = f(2^+) \ \Rightarrow \ 2 + 2 = 4A - 2B + 3 \tag{1}$$

且

$$f(3^-) = f(3^+) \ \Rightarrow \ 9A - 3B + 3 = 6 - A + B \tag{2}$$

聯立 (1)、(2) 兩式可解得 $A = \dfrac{1}{2}$、$B = \dfrac{1}{2}$

7. 設 $f(x)$、$g(x)$ 於 $x = 0$ 不連續，試舉例說明 $f(x) \cdot g(x)$ 於 $x = 0$ 可能會連續。

《解》 ☞ 設

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ 1 & ; x < 0 \end{cases}$$

因

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \ , \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

故 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，則 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在，又

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = 1 \ , \ \lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$$

故 $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$，則 $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ 不存在，因此 $f(x)$、$g(x)$ 於 $x = 0$ 處均不連續，但

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \ ; \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

故

$$\lim_{x \to 0} f(x) \cdot g(x) = 0 = f(0) \cdot g(0)$$

即 $f(x) \cdot g(x)$ 於 $x = 0$ 處連續。

挑戰範例

1. 試證若 $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$ 且 $f(x)$ 在 $x = a$ 爲連續，則 $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x\to c} g(x)) = f(a)$

《証》 ☞

(1) 因 $f(x)$ 在 $x = a$ 爲連續，故

$$\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ \delta_1 > 0\,,\ \ni |x-a| < \delta_1\ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

(2) 因 $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$，由極限的定義可知

$$\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ \delta > 0\,,\ \ni 0 < |x-c| < \delta\ \Rightarrow\ |g(x) - a| < \epsilon$$

取

$$\epsilon = \delta_1 > 0\,,\ \exists\ \delta_2 > 0\,,\ \ni 0 < |x-c| < \delta_2\ \Rightarrow\ |g(x) - a| < \delta_1$$

(3) 由 (1)、(2) 得知

$$\forall\ \epsilon > 0\,,\ \exists\ \delta_2 > 0\,,\ \ni 0 < |x-c| < \delta_2\ \Rightarrow\ |g(x) - a| < \delta_1$$

則 $|f(g(x)) - f(a)| < \epsilon$，故 $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = f(a) = f(\lim\limits_{x\to c} g(x))$

2. 設 $f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x} & ;\ x \neq 0 \\ 0 & ;\ x = 0 \end{cases}$，$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，試就 n 值探討 $f_n(x)$ 於 $x = 0$ 之連續性。

《解》 ☞

(1) $n = 0$ 時

$$f_0(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & ;\ x \neq 0 \\ 0 & ;\ x = 0 \end{cases}$$

因 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，則 $f_0(x)$ 於 0 不連續。

(2) $n=1$、2、$\cdots$ 時

$$f_n(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x} & ;\ x\neq 0 \\ 0 & ;\ x=0 \end{cases}$$

因

$$0\le\left|x^n\sin\frac{1}{x}\right|=|x^n|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x^n|$$

且 $\lim\limits_{x\to 0}|x^n|=0$，故根據夾擠定理可知

$$\lim_{x\to 0}\left|x^n\sin\frac{1}{x}\right|=0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}x^n\sin\frac{1}{x}=0$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f_n(0)=0=f_n(0)$，故 $f_n(x)$ 於 $x=0$ 爲連續 $(\forall\ n\in\mathbb{N})$

3. 設 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$，若 $f(x)$ 爲連續函數，試求 a、b。

《解》 ☞

(1) $x=1\Rightarrow f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{2n-1}+a+b}{1^{2n}+1}=\dfrac{1+a+b}{2}$

(2) $x=-1\Rightarrow f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{2n-1}+a-b}{(-1)^{2n}+1}=\dfrac{-1+a-b}{2}$

(3) $|x|<1\Rightarrow f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx$

(4) $|x|>1\Rightarrow f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^{2n-2}}+\dfrac{b}{x^{2n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\dfrac{1}{x}$

(5) 因 $f(x)$ 於 $x=1$ 連續，故

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$$

則 $1=a+b=\dfrac{1+a+b}{2}$，故

$$a+b=1 \tag{1}$$

因 $f(x)$ 於 $x=-1$ 連續，故

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^-}f(x)=f(-1)$$

則 $a-b=-1=\dfrac{-1+a-b}{2}$，故

$$a-b=-1 \tag{2}$$

聯立 (1) 式、(2) 式，可解得 $a=0$、$b=1$

4. If $f(x)$ is continuous at $x=a$ and that $f(a)>0$. Show that there is an open interval around a on which $f(x)$ is positive.

《証》 ☞ $f(x)$ 於$x=a$ 為連續，故

$$\forall \epsilon>0,\ \exists\ \delta>0,\ \ni |x-a|<\delta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)|<\epsilon$$

取 $\epsilon=f(a)$，則

$$|f(x)-f(a)|<f(a) \ \Rightarrow\ -f(a)<f(x)-f(a)<f(a)$$

即 $0<f(x)<2f(a)$，故 $|x-a|<\delta$，即在區間 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 時，$f(x)>0$

5. 設 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n[x]-2x}{x^n-2}$，試問 $f(x)$ 於 $x=1$ 是否連續？

《解》 ☞

(1) $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^n\cdot[\ 1\ ]-2\cdot 1}{1^n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2}{1-2}=1$

(2) $0<x<1$，則

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n[x]-2x}{x^n-2}=\frac{-2x}{-2}=x$$

故 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$

(3) $1<x<2$，則

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n[x]-2x}{x^n-2}=\frac{[x]-\dfrac{2}{x^{n-1}}}{1-\dfrac{2}{x^n}}=[x]$$

故 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}[x] = 1$

(4) 由 (1)、(2)、(3) 可知

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$$

故 $f(x)$ 於 $x = 1$ 處連續。

6. 試證 $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$，對任一 x 皆爲連續。

《解》 ☞

(1) $n \in \mathbb{Z}$，故

$$f(n) = [n] + \sqrt{n - [n]} = n$$

因

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^+}([x] + \sqrt{x - [x]}\,) = \lim_{x\to n^+}(n + \sqrt{x - n}\,) = n$$

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-}([x] + \sqrt{x - [x]}\,) = \lim_{x\to n^-}\{n - 1 + \sqrt{x - (n-1)}\,\} = n$$

故

$$\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^-} f(x) = f(n) = n$$

因此 $f(x)$ 在 $x = n \in \mathbb{Z}$ 處爲連續。

(2) 設 $n < a < n+1,\ n \in \mathbb{Z}$，故

$$f(a) = [a] + \sqrt{a - [a]} = n + \sqrt{a - n}$$

且

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}([x] + \sqrt{x - [x]}\,) = \lim_{x\to a}([a] + \sqrt{x - [a]}\,) = n + \sqrt{a - n}$$

故 $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$，因此 $f(x)$ 在 $x = a$ 處爲連續。

(3) 由 (1)、(2) 可知 $f(x)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 中均爲連續。

7. 設函數 $f\ (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 而 $f(x) = x[\frac{1}{x}]$（內 [　] 爲最大整數函數），試討論函數 f 在那些點連續？在那些點不連續？爲何？ 《成大》

《解》☞

(1) $x>1$ 時 $f(x)=x[\frac{1}{x}]=0$。

(2) $0<x\leq 1$ 時, 設 $[\frac{1}{x}]=n\in\mathbb{N}$, 故

$$n\leq\frac{1}{x}<(n+1)\ \Rightarrow\ \frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n}$$

因此 $f(x)=x[\frac{1}{x}]=xn$; $\frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ 。

(3) 由 (1)、(2) 可知

$$f(x)=\begin{cases}0 & ;\ x>1\\ nx & ;\ \dfrac{1}{n+1}<x\leq\dfrac{1}{n}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{n}$ 時爲分段點, 現在討論 $x=\frac{1}{n}$ 時 $f(x)$ 的連續性, 因

$$\lim_{x\to(\frac{1}{n})^+}f(x)=\lim_{x\to(\frac{1}{n})^+}x[\frac{1}{x}]=\lim_{x\to(\frac{1}{n})^+}x(n-1)=\frac{n-1}{n}\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{n})^-}f(x)=\lim_{x\to(\frac{1}{n})^-}x[\frac{1}{x}]=\lim_{x\to(\frac{1}{n})^-}xn=1\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})$$

因 $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{n})^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to(\frac{1}{n})^-}f(x)$, 故 $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{n})}f(x)$ 不存在。

即 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{n}$ 處不連續。

(4) 結論 : $f(x)$ 在 $(0\,,\infty)\setminus\{\frac{1}{n}\mid\forall n\in\mathbb{N}\}$ 處連續。

精選習題

1. 試問下列之函數，$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to 0} g(x))$ 是否成立

(a) $f(x)=\begin{cases} 2 & ; x\geq 0 \\ -2 & ; x<0 \end{cases}$、$g(x)=x$　(b) $f(x)=\begin{cases} 2 & ; x\geq 0 \\ -2 & ; x<0 \end{cases}$、$g(x)=x^2$

(c) $f(x)=\begin{cases} 1 & ; x>0 \\ 0 & ; x=0 \\ -1 & ; x<0 \end{cases}$、$g(x)=1-x+[x]$

《解》☞ : (a) 不成立　(b) 成立　(c) 成立

2. 函數定義於 《中興》

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x+\tan x}{\tan x} & ; 若 -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}, x\neq 0 \\ 3 & ; 若 x=0 \end{cases}$$

試證 $f(x)$ 在點 $x=0$ 處爲不連續，又是否可重新定義 $f(0)$ 之值，使得 $f(x)$ 爲連續函數

《解》☞ : 可，$f(0)=2$

3. Suppose function $f(x)=\begin{cases} cx^2+2x & \text{if } x<2 \\ 2x+4 & \text{if } x\geq 2 \end{cases}$ is continuous on $(-\infty, \infty)$. Then, the value of constant c is _______ 《北大經濟》

《解》☞ : $c=1$。

4. $f(x)$ is defined everywhere and continuous $f(x)=\begin{cases} -2\sin x & ; x\leq -\dfrac{\pi}{2} \\ a\sin x+b & ; -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & ; x\geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Evaluate the a and b.

《解》☞ : $a=-1$、$b=1$