喻超凡翻轉
教室叢書

翻轉線性代數

喻超凡
喻超弘
喻婕
編著

喻超凡
Superyu

翻轉
喻超凡教室叢書

翻轉

線性代數

Linear Algebra

喻超凡、喻超弘、喻婕 編著

喻超凡
Superyu
喻超凡數位企業有限公司
http://www.superyu.idv.tw

喻超凡老師的家

超凡小鋪網址：http://www.pcstore.com.tw/superyu

工數神父喻超凡 Facebook **網址**：
http://www.facebook.com/mathsuperyu

喻超凡雲端翻轉數學教室：http://www.superyu.idv.tw

序

線性代數它為抽象代數中的一環，其涵蓋的範圍相當廣泛，而這門課程又是電機、自控 (含機械自控)、通訊、光電 ... 等科系在專業科目中重要的分析工具，同時也為研究所入學考試中必考的學科。因為它具有抽象的概念，所以一般非數學系的同學，因為純數的理論基礎不夠紮實，因而在學習上常有很多的困擾，進而產生了嚴重挫折感，甚至放棄了這門學科，誠屬可惜。因此喻超凡博士將其多年教授線性代數的心得及上課精華，有系統的以結構化的方式，有條不紊的彙整成一冊電機類科專用的線性代數理論與問題集，以期能為眾多的莘莘學子們，在短時間內對線性代數作全盤性的認識與了解，重振同學對線性代數的信心。

最後喻超凡博士將線性代數中重要理論的定義、定理、公式的來源, 及發展的過程和重要的數學家的生平事蹟... 等等的參考文獻, 以註腳的方式加於各章節中, 以增加閱讀本書的趣味性, 進而使讀者能在趣味中了解線性代數的發展過程及整體的全貌。同時喻超凡博士亦有架設網路學校, 網路學校的網址為 http://www.superyu.idv.tw。

本書雖經多次修定及校對, 但仍難免有所疏漏之處, 敬請各位讀者不吝賜教。本書已獲全國各大補習班及學校採用為教科書, 筆者在此致最大的謝意。

喻超凡雲端教室

喻超凡

2020. 4.

目錄

第 1 章 矩陣

1.1 矩陣基本代數運算

1.1.1 基本名詞

1. 列矩陣 (Row matrix)

$$A_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}_{1\times n}$$

2. 行矩陣 (Column matrix)

$$A_{n\times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

3. 方形矩陣 (Square matrix)

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

4. 上三角矩陣 (Upper triangular matrix)

$$U_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

5. 下三角矩陣 (Lower triangular matrix)

$$L_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

6. 對角線矩陣 (Diagonal matrix)

$$D_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

7. 零矩陣 (Null matrix)

$$N_{m\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

8. 子矩陣 (Submatrix)

例如：$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, 則 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\cdots$ 稱爲 A 的子矩陣。

9. 主子矩陣 (Principle submatrix)

對角線元素爲原矩陣對角線元素之子矩陣稱爲矩陣的主子矩陣。例如：

$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, 則 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$、$[1]$、$[5]$、$[0]$ 稱爲 A 的主子矩陣。

10. 列梯形矩陣 (row echelon form matrix)*

若矩陣 A 中列的第一個非零元素以前零的元素數目呈逐列增加, 直到整列全爲零爲止, 則此矩陣稱爲列梯形矩陣。同時每列中第一個非爲零的元素, 稱爲列梯形矩陣 A 的區別元素 (distinguished element or pivot)。

例如：$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 均爲列梯形矩陣。

*row echelon matrix 及 reduced row echelon matrix 的定義, 本書是參考 Lawrence E. Spence, Arnold J. Insel, Stephen H. Friedberg, *Elementrary Linear Algebra A Matrix Approach*, second Edition, pp.33, ISBN 0-13-158034-5. 讀者亦可參考 Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, Tenth Edition, pp.279, ISBN 978-0-470-45836-5. 但有些的課本 row echelon matrix 還要求 pivot 要等於1, 如 Steven J. Leon, *Linear Algebra with Application*, Eighth Edition, pp.13, ISBN 13: 978-0-13-600929-0.

11. 最簡列梯形矩陣 (reduced row echelon form matrix)

列梯形矩陣若其區別元素滿足

(1) 每一個區別元素是他們所在的行中唯一的非零元素。

(2) 每一個區別元素皆為 1。

則該列梯形矩陣稱為最簡列梯形矩陣。例如：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.1.2 矩陣的運算

1. 相等 (equal)

設 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$、$B = [b_{ij}]_{m\times n}$，若 $A = B$，則 $a_{ij} = b_{ij}$。

2. 相加 (add)

(1) 定義：

設 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$、$B = [b_{ij}]_{m\times n}$、$C = [c_{ij}]_{m\times n}$，若 $C = A + B$, 則 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

(2) 性質：

(a) $A + B = B + A$

(b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(c) $A + (-A) = 0$

(d) $A + 0 = A$

3. 相乘 (multiple)

(1) 純量與矩陣相乘

設 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ 且 α 為純量, 則 $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$，即 A 中每一個元素均乘上 α。

(2) 二矩陣相乘

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$B=[b_{ij}]_{n\times p}$、$C=[c_{ij}]_{m\times p}$，若 $C=A\times B$，則

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \quad ; \quad \begin{cases} i=1,2,\cdots m \\ j=1,2,\cdots p \end{cases}$$

(3) 分割矩陣的乘法

(a) 設矩陣為

$$A_{m\times n}=[\,A_1 \;\; A_2 \;\; \cdots \;\; A_n\,]$$

其中 A_i 表示矩陣 A 第 i 行的行向量，且

$$X_{n\times 1}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

則

$$AX=x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n$$

(b) 設矩陣為

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

其中 A_i 表示矩陣 A 第 i 列的列向量，且

$$X_{1\times m}=[\,x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_m\,]$$

則

$$XA=x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_mA_m$$

(c) 設矩陣 A、B 可表示成

$$A_{m\times p}=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad 、 \quad B_{p\times n}=\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

其中 A_{ij}、B_{ij} 為 A 及 B 的分割矩陣，且矩陣相乘的部分均成立時，則

$$\begin{aligned} AB &= \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4) 性質：

(a) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$。

(b) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$。

(c) $A \times B$ 不一定等於 $B \times A$。

(d) $A \times B = 0$ 不一定 $A = 0$ 或 $B = 0$。

4. 轉置 (transpose) 矩陣行列對調

(1) 定義:

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$，則 $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$。

(2) 性質：

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

(c) $(A \times B \times C)^T = C^T \times B^T \times A^T$

(d) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(e) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ (α 爲純量)

5. 共軛 (conjugate)

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$，則 $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]_{m \times n}$。

6. 共軛轉置 (conjugate transpose)

(1) 定義[*]：

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$，則 $\overline{A}^T = A^H = A^* = A^\dagger = [\overline{a}_{ji}]_{n \times m}$。

(2) 性質：

[*] $A^\dagger$ 唸成 A dagger，普遍用於量子力學 (quantum mechanics) 中。

(a) $(A^*)^* = A$

(b) $(A \times B)^* = B^* \times A^*$

(c) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(d) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$ (α 爲純量)

7. 方陣乘冪 (power)

設 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$，則 $A^2 = A \times A$、$A^k = A^{k-1} \times A$。

8. 方陣的跡數 (trace) 方陣所有對角線元素的和

(1) 定義：

設 A 爲 $n \times n$，且 $A = [a_{ij}]$, 則其跡數定義成

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(2) 性質：設 A、B 均爲 $n \times n$ 的方陣

(a) $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$

(b) $tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A)$ (α 爲純量)

(c) $tr(A^T) = tr(A)$

(d) $tr(A^*) = \overline{tr(A)}$

(e) $tr(A \times B) = tr(B \times A)$ (只要 AB、BA 爲方陣即可)

(f) $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$

9. 基本列 (行) 運算 (elementary row(column) operations)

(1) 矩陣中某兩列 (行) 互調運算

以符號 R_{ij} 表示矩陣中第 i 列與第 j 列相互對調運算。

以符號 C_{ij} 表示矩陣中第 i 行與第 j 行相互對調運算。

例：$R_{12}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$；$C_{23}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c & b \\ d & f & e \end{pmatrix}$

(2) 矩陣中第 i 列 (行) 乘上純量 k 的運算

以符號 $R_i^{(k)}$ 表示矩陣中第 i 列乘上純量 k 的運算。

以符號 $C_i^{(k)}$ 表示矩陣中第 i 行乘上純量 k 的運算。

例: $R_1^{(k)}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \end{pmatrix}$；$C_2^{(k)}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \end{pmatrix}$

(3) 矩陣中某列 (行) 乘上純量 k 加到另一列 (行) 的運算

以符號 $R_{ij}^{(k)}$ 表示矩陣中第 i 列乘上純量 k 加到第 j 列的運算。

以符號 $C_{ij}^{(k)}$ 表示矩陣中第 i 行乘上純量 k 加到第 j 行的運算。

例: $R_{12}^{(k)}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ ka+d & kb+e & kc+f \end{pmatrix}$；

$C_{23}^{(k)}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & kb+c \\ d & e & ke+f \end{pmatrix}$

1.1.3 其他特殊矩陣的定義

1. 單位矩陣 (Unit matrix)

(1) 加法單位矩陣：

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$O=[0_{ij}]_{m\times n}$，因

$$A+O=O+A=A$$

故 $O=[0_{ij}]_{m\times n}$ 稱爲 A 的加法單位矩陣。

(2) 乘法單位矩陣：

設 $A = [\,a_{ij}\,]_{m\times n}$, 且 $I = [\,\delta_{ij}\,]_{n\times n}$, 其中 δ_{ij} 稱為 Kronecker delta (克洛涅克 delta) 函數, 即 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$ $(i\,,\,j = 1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,n)$, 因此

$$I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{cases} A_{m\times n} \times I_{n\times n} = A_{m\times n} & ;\text{稱 } I_{n\times n} \text{ 為右單位矩陣} \\ I_{m\times m} \times A_{m\times n} = A_{m\times n} & ;\text{稱 } I_{m\times m} \text{ 為左單位矩陣} \end{cases}$$

習慣上所稱的單位矩陣是指乘法單位矩陣。

2. 反矩陣 (Inverse matrix)

(1) 加法反矩陣：設 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, 因

$$A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$$

故 $(-A) = [-a_{ij}]_{m\times n}$ 稱為 A 的加法反矩陣。

(2) 乘法反矩陣

(a) 若 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, 而且 $R = [r_{ij}]_{n\times m}$, 會使得 $A \times R = I_{m\times m}$, 則 R 稱為 A 的右反矩陣。

(b) 若 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, 而且 $L = [\ell_{ij}]_{n\times m}$, 會使得 $L \times A = I_{n\times n}$, 則 L 稱為 A 的左反矩陣。

(c) 若 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, 而且 $X = [x_{ij}]_{n\times m}$, 會使得 $X \times A = I_{n\times n}$ 及 $A \times X = I_{m\times m}$ 時 , 則 X 稱為 A 的兩邊反矩陣 (two-sided inverse)。

(d) 方陣 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, 滿足 $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_{n\times n}$ 時 , 則 A^{-1} 稱為 A 的反矩陣。

(e) 習慣上所稱的反矩陣是指方陣的乘法反矩陣。

3. 基本矩陣 (elementary matrix)

單位矩陣 $I_{n\times n}$ 經由一次的基本列 (行) 運算, 所得到的新矩陣, 稱為基本矩陣。

(1) 定義：

(a) 單位矩陣 I 的第 i 列與第 j 列互調，所得到的基本矩陣一般以符號 Er_{ij} 來表示，即 $Er_{ij} = R_{ij}(I)$。

(b) 單位矩陣 I 的第 i 行與第 j 行互調，所得到的基本矩陣一般以符號 Ec_{ij} 來表示，即 $Ec_{ij} = C_{ij}(I)$。

(c) 單位矩陣 I 的第 i 列乘上純量 k，所得到的基本矩陣一般以符號 $Er_i^{(k)}$ 來表示, 即 $Er_i^{(k)} = R_i^{(k)}(I)$。

(d) 單位矩陣 I 的第 i 行乘上純量 k，所得到的基本矩陣一般以符號 $Ec_i^{(k)}$ 來表示, 即 $Ec_i^{(k)} = C_i^{(k)}(I)$。

(e) 單位矩陣 I 的第 i 列乘上純量 k 加到第 j 列，所得到的基本矩陣一般以符號 $Er_{ij}^{(k)}$ 來表示，即 $Er_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k)}(I)$。

(f) 單位矩陣 I 的第 i 行乘上純量 k 加到第 j 行，所得到的基本矩陣一般以符號 $Ec_{ij}^{(k)}$ 來表示，即 $Ec_{ij}^{(k)} = C_{ij}^{(k)}(I)$。

(2) 性質：設 A 爲 $n \times m$ 的矩陣

(a) $R_{ij}(A) = Er_{ij} \times A$

(b) $C_{ij}(A) = A \times Ec_{ij}$

(c) $R_i^{(k)}(A) = Er_i^{(k)} \times A$

(d) $C_i^{(k)}(A) = A \times Ec_i^{(k)}$

(e) $R_{ij}^{(k)}(A) = Er_{ij}^{(k)} \times A$

(f) $C_{ij}^{(k)}(A) = A \times Ec_{ij}^{(k)}$

(3) 反矩陣性質：每一個基本矩陣皆爲可逆，且其反矩陣亦爲一基本矩陣。

(a) $(Er_{ij})^{-1} = Er_{ij}$ (因 $Er_{ij}Er_{ij} = I$)

(b) $(Ec_{ij})^{-1} = Ec_{ij}$

(c) $(Er_i^{(k)})^{-1} = Er_i^{(1/k)}$；$k \neq 0$ (因 $Er_i^{(k)}Er_i^{(1/k)} = I$)

(d) $(Ec_i^{(k)})^{-1} = Ec_i^{(1/k)}$; $k \neq 0$

(e) $(Er_{ij}^{(k)})^{-1} = Er_{ij}^{(-k)}$ (因 $Er_{ij}^{(k)}Er_{ij}^{(-k)} = I$)

(f) $(Ec_{ij}^{(k)})^{-1} = Ec_{ij}^{(-k)}$

4. 相當矩陣 (equivalent matrix)

矩陣 B 稱爲矩陣 A 的相當矩陣 (equivalent matrix) 時 , 若且唯若存在兩個非奇異矩陣 P 、Q 即 $|P| \neq 0$ 、$|Q| \neq 0$, 使得 $B = PAQ$, 而此種轉換 , 亦稱爲相當轉換 。

5. 相似矩陣 (similar matrix)

當 $B = P^{-1}AP$ 時 , 稱爲相似轉換 (similarity transformation) , 而 B 稱爲 A 的相似矩陣。若 B 爲 A 的相似矩陣 , 則具有下列的性質

(1) A 和 B 具有相同的行列式 。

(2) A 和 B 具有相同的 Rank 。

(3) A 和 B 具有相同的 Nullity 。

(4) A 和 B 具有相同的 trace 。

(5) A 和 B 具有相同的特徵多項式及最小多項 。

(6) A 和 B 具有相同的特徵值但特徵向量不一定相同 。

(7) A 和 B 具有相同的維數的特徵空間 。

上面的所有性質均爲逆定理不恒眞 。

6. 對稱矩陣 (Symmetric matrix)

設 A 爲 $n \times n$ 的方陣 , 若 $A^T = A$, 則稱 A 爲對稱矩陣 。