序

線性代數及機率這兩門學科, 對許多電機類的同學而言, 幾乎都是心中的夢魘, 爲什麼會這樣呢？主要的原因就是, 這兩門學科的公設、定義、定理及符號太多且太繁, 導致許多同學無法有效的去理解及學習。因此 **喻超凡數學工作室**, 集多位博士級的資深線性代數及機率的老師, 將他們在各大補習班及學校任教數十年的精華, 及配合全國各大名校 (台、清、交、成 ...) 研究所考試所須用到的線性代數及機率的公式, 精、準且有條理的彙整出一本線性代數及機率的殺手級密技, 以作爲同學在考試前自修及考試當天衝刺必備的葵花寶典。

本書手稿雖經多次修定及校對, 但仍難免有所疏漏之處, 敬請各位老師和同學不吝賜教。本書已獲全國各大補習班採用爲輔助教材, 筆者在此致最大的謝意。同時喻超凡數學工作室亦將多年之工程數學歷試詳解置於網站中, 供同學下載參考, 網址爲 http://www.superyu.idv.tw 歡迎同學上網參觀指教。

喻超凡

2013. 4.

目錄

Part I

線性代數

第 1 章 矩陣概論

1.1 矩陣的定義及基本運算

1.1.1 基本定義

1. 列矩陣 (Row matrix)

$$A_{1\times n} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]_{1\times n}$$

2. 行矩陣 (Column matrix)

$$A_{n\times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

3. 方形矩陣 (Square matrix)

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

4. 上三角矩陣 (Upper triangular matrix)

$$U_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

5. 下三角矩陣 (Lower triangular matrix)

$$L_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

6. 對角線矩陣 (Diagonal matrix)

$$D_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

7. 零矩陣 (Null matrix)

$$N_{m\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

8. 子矩陣 (Sub-matrix)

例如 : $A_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, 則 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\cdots$, 稱爲子矩陣 。

9. 主子矩陣 (Principle sub-matrix)

對角線元素爲原矩陣對角線元素之子矩陣稱爲矩陣的主子矩陣 。

例如 : $A_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, 則 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\cdots$, 稱爲主子矩陣 。

10. 列梯形矩陣 (echelon matrix)

若矩陣 A 中 , 列的第一個非零元素以前零的元素數目呈逐列增加 , 直到只剩下 全爲零的列爲止 , 則此矩陣稱爲列梯形矩陣 。同時每列中第一個非爲零的元素 , 稱爲列梯形矩陣 A 的區別元素 (distinguished element or pivot) 。

11. 最簡列梯形矩陣 (row reduced echelon matrix)

若列梯形矩陣其區別元素滿足下面的性質時, 則該列梯形矩陣稱爲最簡列梯形矩陣 。

(1) 每一個區別元素是他們所在的行中唯一的非零元素 。

(2) 每一個區別元素皆爲 1 。

1.1.2 基本運算

1. 相等 (equal) :

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$B=[b_{ij}]_{m\times n}$, 若 $A=B$ 則 $\forall a_{ij}=b_{ij}$。

2. 相加 (add) :

(1) 定義 :

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$B=[b_{ij}]_{m\times n}$、$C=[c_{ij}]_{m\times n}$, 若 $A+B=C$ 則 $\forall c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$。

(2) 性質 : 設 A、B 均爲 $m\times n$ 的矩陣

(a) $A+B=B+A$

(b) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(c) $A+(-A)=0$, 其中 0 爲 $m\times n$ 的 0 矩陣。

(d) $A+0=A$, 其中 0 爲 $m\times n$ 的 0 矩陣。

3. 相乘 (multiple) :

(1) 純量與矩陣相乘

設 $A_{m\times n}=[a_{ij}]$ 且 α 爲純量, 則 $\alpha A=[\alpha a_{ij}]$, 即 A 中每一個元素均乘上 α。

(2) 二矩陣相乘

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$、$B=[b_{ij}]_{n\times p}$, 則 $A\times B=C=[c_{ij}]_{m\times p}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \quad ; \begin{cases} i=1,2,\cdots m \\ j=1,2,\cdots p \end{cases}$$

(3) 分割矩陣的乘法

(a) 設矩陣爲

$$A_{m\times n}=[A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_n]$$

其中 A_i 表示矩陣 A 第 i 行的行向量，且

$$X_{n\times 1}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

則

$$AX=x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n$$

(b) 設矩陣為

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_m\end{bmatrix}$$

其中 A_i 表示矩陣 A 第 i 列的列向量，且

$$X_{1\times m}=[x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_m]$$

則

$$XA=x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_mA_m$$

(c) 設矩陣 A、B 可表示成

$$A_{m\times p}=\left[\begin{array}{c|c}A_{11}&A_{12}\\\hline A_{21}&A_{22}\end{array}\right]\quad、\quad B_{p\times n}=\left[\begin{array}{c|c}B_{11}&B_{12}\\\hline B_{21}&B_{22}\end{array}\right]$$

其中 A_{ij}、B_{ij} 為 A 及 B 的分割矩陣，且矩陣相乘的部分均成立時，則

$$AB=\left[\begin{array}{c|c}A_{11}&A_{12}\\\hline A_{21}&A_{22}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}B_{11}&B_{12}\\\hline B_{21}&B_{22}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}&A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}&A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{bmatrix}$$

(4) 性質：

(a) $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$。

(b) $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$。

(c) $A\times B$ 不一定等於 $B\times A$。

(d) $A\times B=0$ 不一定 $A=0$ 或 $B=0$。