序

許多看過這本書的同學, 第一個反應, 就有如王國維在人間詞話中的第三境「衆裏尋他千百度, 驀然回首, 那人卻在燈火闌珊處」, 因爲想要應考工程數學的同學, 幾乎都有相同的問題, 那就是在研究所考試的前一、兩天, 工程數學要讀些什麼? 由於坊間的一些參考書, 不是太厚重就是理論太繁瑣艱澀, 在考試的前幾天根本無從下手複習, 其實在考試前一、兩天或是當天, 千萬不要再作歷屆試題或是參考書中的題目, 因爲這些題目有一部分不是馬上就可以解出, 當天作它, 會失掉信心, 在考場上也會喪失許多靈感。因此喻超凡數學工作室秉著武器在於精, 不在於多; 開火在於準, 不在於強的理念, 集多位博士級的資深工程數學老師, 將所有研究所工程數學考試所須的公式, 精、準且有條理的彙整出來。以作爲同學在考試前衝刺所必備的工具書, 考試當天所必帶的葵花寶典。

本書手稿雖經多次修定及校對, 但仍難免有所疏漏之處, 敬請各位老師和同學不吝賜教。同時本書已獲全國各大補習班採用爲輔助教材, 筆者在此致最大的謝意。同時喻超凡數學工作室亦將多年之工程數學歷試詳解置於網站中, 供同學下載參考, 網址爲 http://www.superyu.idv.tw 歡迎同學上網參觀指教。

喻超凡

2012. 2.

目錄

I 基礎數學

1 代數

1.1 邏輯命題

1. 同義敘述：眞值表相同者，稱爲同義。設p、q 表二敘述，$\sim p$ 表 p 之否定 (即非 p)，則

   (1) $\sim(p \cup q) \equiv (\sim p) \cap (\sim q)$

   (2) $\sim(p \cap q) \equiv (\sim p) \cup (\sim q)$

   (3) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv (\sim p \cup q)$

   (4) $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \cap (q \Rightarrow p)$

2. 充分、必要、充要條件：

   (1) 命題 $''S \Longrightarrow T''$ 爲眞時, 則 S 爲 T 之充分條件, T 爲 S 之必要條件。

   (2) 命題 $''S \Longleftrightarrow T''$ 爲眞時, 則 S 與 T 互爲充要條件。

1.2 數系

1. 數系的符號：$\mathbb{N}$ 表自然數系, $\mathbb{Z}$ 表整數系, $\mathbb{Q}$ 表有理數系, $\mathbb{R}$表實數系, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 表無理數系, $\mathbb{C}$ 表複數系。

2. 設 S 不爲空集合，且 $S \subset \mathbb{R}$ 同時 S 有上界，則 S 有最小上界。(實數的完備性)

3. 任意二相異實數之間必可找到第三個實數。(實數的稠密性)

1.3 基本不等式

1. a、$b \in \mathbb{R}$，則 $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

2. a、$b \in \mathbb{R}$，則 $\begin{cases} c < 0 \text{、} a > b \Rightarrow ac < bc \\ c > 0 \text{、} a > b \Rightarrow ac > bc \end{cases}$

3. $a > b$ 且 $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

4. $a > b > 0$、$c > d > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$、$ac > bd$

5. 算幾不等式（算術平均數 $\geq$ 幾何平均數）

   若 a_1、a_2、$\cdots$、$a_n > 0$ 則 $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\, a_2 \cdots a_n}$

6. Cauchy–Schwarz 不等式 (又稱爲 Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz 不等式)

   若 a_1、a_2、$\cdots$、a_n；b_1、b_2、$\cdots$、b_n 均爲實數，則

   $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$

1.4 方程式組公式解法：(Cramer rule)

1. $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, $\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, 則 $x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ ； $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

2. $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$, $\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$, 則

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\triangle} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\triangle} \quad ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\triangle}$$

1.5 比例關係

1. 合比定理：若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 或 $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ 。
2. 分比定理：若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ 或 $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$ 。
3. 合分比定理：若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ 或 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$ 。
4. 等比定理：若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, 則 $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ 。

1.6 因式分解公式

1. $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
2. $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ 、$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
3. $x^4-y^4=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ 、$x^4+y^4=(x^2-\sqrt{2}\,xy+y^2)(x^2+\sqrt{2}\,xy+y^2)$
4. $n\in\mathbb{N}$, $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+y^{n-1})$
5. n 爲正奇數 , $x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots+(-1)^{n-1}y^{n-1})$

1.7 二項式

1. $(x+y)^n=C_0^nx^n+C_1^nx^{n-1}y+C_2^nx^{n-2}y^2+\cdots+C_n^ny^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_k^nx^{n-k}y^k \quad (n\in\mathbb{N})$

   其中 $C_0^n=1$ 、$C_k^n=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

2. $(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots \quad (n\notin\mathbb{N}\cup\{0\}\ ;\ |x|<1)$

3. $C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

4. $C_0^n + C_1^n + \cdots + C_n^n = 2^n \quad (n \in \mathbb{N})$

5. $C_0^n + C_2^n + C_4^n + \cdots = C_1^n + C_3^n + C_5^n + \cdots = 2^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

6. $C_1^n + 2 \cdot C_2^n + \cdots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$

7. $C_1^n - 2 \cdot C_2^n + \cdots + (-1)^{n-1} n C_n^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$

1.8 有限級數和

1. 常用級數和

   (1) 等差數列 $\{a_n\}$，首項 a_1、公差 $d = a_{n+1} - a_n$，則首 n 項和爲 $S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

   (2) 等比數列 $\{a_n\}$，其首項爲 a_1、公比爲 $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，則首 n 項和爲 $S_n = \begin{cases} na_1 & ;\text{當 } r = 1 \\ \dfrac{a_1 - ra_n}{1-r} & ;\text{當 } r \neq 1 \end{cases}$

2. 自然級數（$n \in \mathbb{N}$）

   (1) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   (2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

   (3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

   (4) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

   (5) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \dfrac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

3. 分數式級數和（$n \in \mathbb{N}$）

   (1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

   (2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1 \cdot 2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)})$

   (3) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!} = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$

2 函數

2.1 定義

1. 設 A、B 爲兩個非空集合, 若 A 中所有元素，恰有 B 中一元素對應，此對應的關係稱爲由 A 映至 B 之函數。表示成 $f : A \to B$ 或 $f = f(x)$。

2. 設 $f: A \to B$, 若 $\forall x$ 、$y \in A$ 且 $x \neq y$, 則 $f(x) \neq f(y)$ 時, f 稱爲一對一函數,記作 $1-1$ 函數。
3. 設 $f: A \to B$ 且 $f(A) = B$ 則 f 稱爲映成函數。
4. 設 $f: A \to B$ 爲一對一映成函數時,則具有反函數 $f^{-1}: B \to A$。
5. 設 D 、E 、F 爲任意三個非空集合,$f: D \to E$ 、$g: E \to F$ 是二個函數,函數 $h: D \to F$ 定義成 $h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x)$,則函數 h 稱爲 f 與 g 的合成函數。

2.2 週期函數

1. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+p) = f(x)$,則 $f(x)$ 稱爲週期函數數,而最小正數 p 叫做 $f(x)$ 之週期。
2. 若 $f(x)$ 的週期爲 p 則 $f(kx)$ 之週期爲 $\dfrac{p}{|k|}$ $(k \neq 0)$。

2.3 奇偶函數

1. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(-x) = -f(x)$, 則 $f(x)$ 稱爲奇函數。(圖形對稱原點)
2. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(-x) = f(x)$, 則 $f(x)$ 稱爲偶函數。(圖形對稱 y 軸)
3. 常見的奇函數
   $\sin x$ 、$\tan x$ 、$\cot x$ 、 $\sinh x$ 、 $\tanh x$ 、$\sin^{-1} x$ 、$\tan^{-1} x$ 、x 、x^3 、x^5 、$\cdots$
4. 常見的偶函數
   $\cos x$ 、 $\cosh x$ 、|奇偶函數| 、f(偶函數) 、c(常數) 、x^2 、x^4 、$\cdots$

2.4 單調函數(增減函數之總稱)

1. $\forall x_1$ 、$x_2 \in I$ 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,則稱 $f(x)$ 在區間 I 中爲遞增函數。
2. $\forall x_1$ 、$x_2 \in I$ 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,則稱 $f(x)$ 在區間 I 中爲遞減函數。
3. $\forall x_1$ 、$x_2 \in I$ 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,則稱 $f(x)$ 在區間 I 中爲嚴格遞增函數。
4. $\forall x_1$ 、$x_2 \in I$ 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,則稱 $f(x)$ 在區間 I 中爲嚴格遞減函數。

2.5 最大整數函數 (Greatest-integer function)

1. $[x]$ 表示取不大於 x 的最大整數。
2. 基本性質:

   (1) $[x] = n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$,則 $n \leq x < n+1$

   (2) $[[x]] = [x]$

   (3) $[x \pm n] = [x] \pm n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$

   (4) $x - 1 < [x] \leq x$

   (5) $[-x] = -[x] - 1$, 其中 $x \notin \mathbb{Z}$

2.6 絕對值函數

1. $|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$

2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad ; \quad |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

3. $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ (三角不等式)

4. $|x \pm y \pm z| \leq |x| + |y| + |z|$

2.7 符號函數

$$\mathrm{Sgn}(x) = \begin{cases} +1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

3 多項式

定義：多項式乃是自變數 x 的非負整數次冪, 有限項的線性組合。例：$f(x) = x^2 + x + 1$

3.1 多項式 $f(x) = g(x)$

1. $f(x)$ 與 $g(x)$ 所對應的同次項係數相等。

2. 任意的 x 值代入，則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 等值。

3.2 餘式定理

1. 若 $f(x)$ 爲多項式，則 $f(x)$ 除以 $x - a$ 的餘式爲 $f(a)$。

2. 若 $f(x)$ 爲多項式，則 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$ 的餘式爲 $\frac{f(a)}{a-b}(x-b) + \frac{f(b)}{b-a}(x-a)$。

3. 若 $f(x)$ 爲多項式，則 $f(x)$ 除以 $(x-a)^2$ 的餘式爲 $f(a) + (x-a)f'(a)$。

4 指數與對數函數

4.1 定義

1. 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$、$x \in \mathbb{R}$ 則 $f(x) = a^x$ 稱爲以 a 爲底之指數函數。

2. 以a 爲底之指數函數的反函數，稱爲以 a 爲底之對數函數記爲 $\log_a$，即 $y = a^x$ 則 $x = \log_a y$，其中 y 稱爲眞數。若 $a = e$ $(e = 2.71828182845904523536\cdots)$ 時，稱爲自然對數, 表成
$x = \log_e y = \ln y$。

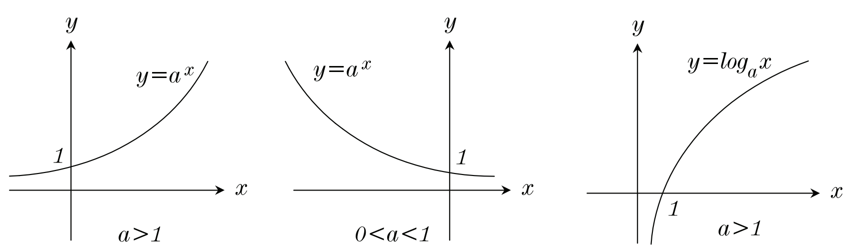
4.2 指數律

設 m 、$n \in \mathbb{Z}$, 且 a 、b 爲非零之實數, 則

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 、$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$ 、$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
3. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ 、$a^0 = 1$
4. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ ($a > 0$)

4.3 基本指數與對數圖形

$y = a^x$	$y = a^x$	$y = \log_a x$	$y = \log_a x$
$(a > 1)$ 增函數	$(0 < a < 1)$ 減函數	$(a > 1)$ 增函數	$(0 < a < 1)$ 減函數



4.4 對數之運算

設 a 、$b > 0$, a 、$b \neq 1$ 、$M > 0$ 、$N > 0$

1. $\log_e M = \ln M$ 其中 $e = 2.71828182845904523536\cdots$
2. $a^{\log_a M} = M$ 、$\log_a a^M = M$ 、$e^{\ln M} = M$ 、$\ln e^M = M$
3. $a^M = e^{\ln(a^M)}$
4. $\ln e = 1$ 、$\ln 1 = 0$ 、$\ln 0^+ = -\infty$ 、$\ln \infty = \infty$
5. $\ln(MN) = \ln M + \ln N$
6. $\ln \dfrac{M}{N} = \ln M - \ln N$
7. $\ln M^p = p \ln M$ ($p \in \mathbb{R}$)
8. $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ (換底)

4.5 對數性質

設 a、$b>0$，a、$b\neq 1$，且 $x>y>0$，則

1. $(a>1$、$b>1)$ 或 $(0<a<1$、$0<b<1)\Rightarrow \log_a b>0$
2. $(a>1$、$0<b<1)$ 或 $(0<a<1$、$b>1)\Rightarrow \log_a b<0$
3. $a>b>1\Rightarrow 0<\log_a b<1$
4. $1>a>b>0\Rightarrow \log_a b>1$
5. 若 $a>1$ 時，$\log_a x>\log_a y$
6. 若 $0<a<1$ 時，$\log_a x<\log_a y$

5 三角函數

5.1 度量

1. 弧長 s，半徑 r，且中心角爲 θ 弳，則弧長 $s=r\theta$。
2. 中心角 θ 弳或爲 α^o，則 $\dfrac{\theta}{\pi}=\dfrac{\alpha}{180}$(即 $\pi=180^o$，1 弳 $=57^o$)。
3. 半徑 r，弧長 s，且中心角爲 θ 弳的扇形，其面積爲 $\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rs$。

5.2 三角函數基本關係

1. $\sin\theta\cdot\csc\theta=1$、$\cos\theta\cdot\sec\theta=1$、$\tan\theta\cdot\cot\theta=1$
2. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$、$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$、$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$
3. $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$、$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$、$\sin^2\theta=\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$、$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$

5.3 三角函數的函數值

1. 特別角的三角函數值

θ	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	15^o	75^o	22.5^o
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$

2. 鉛直軸加減角度函數正餘互換，水平軸加減角度函數不變。而新函數的符號視原函數所在的象限而定。
   $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$、$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$、$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta$。
   $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$、$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$、$\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$。

3. 三角函數的符號：
   (1) $\sin\theta$、$\csc\theta$ 在第1及第2象限爲正值，第3及第4象限爲負值。
   (2) $\cos\theta$、$\sec\theta$ 在第1及第4象限爲正值，第2及第3象限爲負值。
   (3) $\tan\theta$、$\cot\theta$ 在第1及第3象限爲正值，第2及第4象限爲負值。

5.4 複角三角函數

1. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
3. $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

5.5 倍角三角函數

1. $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$
2. $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$
3. $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ 、 $\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ 、 $\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$
4. $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ 、 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

5.6 半角三角函數

1. $\sin\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ 、 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$
2. $\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$
3. $\tan\dfrac{\theta}{2}=t\Rightarrow\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$ 、 $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$ 、 $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

5.7 公式變化

1. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$
2. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$
3. $\tan\alpha\pm\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ 、 $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$
4. $\cot\alpha\pm\cot\beta=\dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$ 、 $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

5. $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ ，其中 $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 、 $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

6. $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ 、 $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ 、 $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

5.8 積化和差

1. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$
2. $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$
3. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$
4. $-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$

5.9 和差化積

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
3. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

5.10 正弦餘弦定理

1. 正弦定理：$\triangle ABC$ 的三邊長爲 a 、b 、c，且三邊的對角爲 α 、β 、γ，同時三角形外接圓半徑爲 R，則
   $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$
2. 餘弦定理：$\triangle ABC$ 的三邊長爲 a 、b 、c，且三邊的對角爲 α 、β 、γ，則
   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ 、$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ 、$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

5.11 半角公式

$\triangle ABC$ 的三邊長爲 a 、b 、c，且三邊的對角爲 α 、β 、γ，令 $s = \dfrac{a+b+c}{2}$，則

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$，$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

5.12 面積公式

$\triangle ABC$ 的三邊長爲 a 、b 、c，且三邊的對角爲 α 、β 、γ，令三角形的面積爲 $\triangle$，則

1. 已知二邊及夾角 $\triangle = \dfrac{1}{2}bc\,\sin\alpha = \dfrac{1}{2}ab\,\sin\gamma = \dfrac{1}{2}ac\,\sin\beta$ 。

2. 已知三邊 $\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 其中 $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

5.13 反三角函數部分

1. 反三角函數之定域與值域

反三角函數式	定義域	值 域
$\sin^{-1} x = \theta$	$\|x\| \leq 1$	$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos^{-1} x = \theta$	$\|x\| \leq 1$	$\theta \in [0, \pi]$
$\tan^{-1} x = \theta$	$x \in \mathbb{R}$	$\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\cot^{-1} x = \theta$	$x \in \mathbb{R}$	$\theta \in (0 < \theta < \pi)$
$\sec^{-1} x = \theta$	$\|x\| \geq 1$	$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$
$\csc^{-1} x = \theta$	$\|x\| \geq 1$	$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$

2. 正反函數相消公式

$\sin \sin^{-1} x = x \quad (\| x \| \leq 1)$	$\sin^{-1} \sin \theta = \theta\ ,\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\cos \cos^{-1} x = x \quad (\| x \| \leq 1)$	$\cos^{-1} \cos \theta = \theta\ ,\ \theta \in [0, \pi]$
$\tan \tan^{-1} x = x \quad (x \in \mathbb{R})$	$\tan^{-1} \tan \theta = \theta\ ,\ \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\cot \cot^{-1} x = x \quad (x \in \mathbb{R})$	$\cot^{-1} \cot \theta = \theta\ ,\ \theta \in (0 < \theta < \pi)$
$\sec \sec^{-1} x = x \quad (\| x \| \geq 1)$	$\sec^{-1} \sec \theta = \theta\ ,\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$
$\csc \csc^{-1} x = x \quad (\| x \| \geq 1)$	$\csc^{-1} \csc \theta = \theta\ ,\ \theta \in (0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$

5.14 反三角函數正負互換公式

1. $\sin^{-1}(-a) = -\sin^{-1} a \quad (| a | \leq 1)$
2. $\cos^{-1}(-a) = \pi - \cos^{-1} a \quad (| a | \leq 1)$
3. $\tan^{-1}(-a) = -\tan^{-1} a \quad (a \in \mathbb{R})$
4. $\cot^{-1}(-a) = \pi - \cot^{-1} a \quad (a \in \mathbb{R})$