103-105年公職技師

工程數學試題詳解

喻超凡　喻超弘編著

喻超凡數位企業有限公司

目錄

Part I

103年歷試詳解

翻印必究
嚴禁重製

1. 103年公務人員電力、電子、電信、醫學工程高考

甲、申論題部分 (50分)

1. 請用拉普拉斯轉換法解微分方程式 (15%)

$$\frac{dy}{dt} - 6y + 9\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 4t^3e^{3t}\ ,\ y(0) = 0$$

《喻超凡，喻超弘 103電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ 對方式兩端取 L–T，可得

$$sY(s) - y(0) - 6Y(s) + 9\,\frac{1}{s}Y(s) = 4 \times \frac{3!}{(s-3)^4}$$

其中 $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s)$，整理可得

$$\frac{s^2-6s+9}{s}Y(s) = \frac{4!}{(s-3)^4}$$

即

$$Y(s) = \frac{4! \times s}{(s-3)^6}$$

故

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{4! \times s}{(s-3)^6}\} \\
&= \frac{d}{dt}\mathscr{L}^{-1}\{\frac{4!}{(s-3)^6}\} = \frac{d}{dt}\{4!e^{3t}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s^6})\} \\
&= \frac{d}{dt}\{\frac{4!t^5e^{3t}}{5!}\} = t^4e^{3t} + \frac{3}{5}t^5e^{3t}
\end{aligned}$$

2. 令 $A=\begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \lambda_2 & 1+\lambda_2 a_2 & \lambda_2 a_3 & \cdots & \lambda_2 a_n \\ \lambda_3 & \lambda_3 a_2 & 1+\lambda_3 a_3 & \cdots & \lambda_3 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} a_2 & \lambda_{n-1} a_3 & \cdots & \lambda_{n-1} a_n \\ \lambda_n & \lambda_n a_2 & \lambda_n a_3 & \cdots & 1+\lambda_n a_n \end{bmatrix}$, 求解 A 的反矩陣 (inverse matrix)。(10分)

《喻超凡, 喻超弘 103電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 ☞ $$[A|I]=\left[\begin{array}{ccccc|cccccc} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 1+\lambda_2 a_2 & \lambda_2 a_3 & \cdots & \lambda_2 a_n & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_3 a_2 & 1+\lambda_3 a_3 & \cdots & \lambda_3 a_n & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} a_2 & \lambda_{n-1} a_3 & \cdots & \lambda_{n-1} a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \lambda_n & \lambda_n a_2 & \lambda_n a_3 & \cdots & 1+\lambda_n a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_{12}^{(-\lambda_2)}R_{13}^{(-\lambda_3)}\cdots R_{1n}^{(-\lambda_n)}}\left[\begin{array}{ccccc|cccccc} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\lambda_3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_{21}^{(-a_2)}R_{31}^{(-a_3)}\cdots R_{n1}^{(-a_n)}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3+\cdots+\lambda_n a_n & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\lambda_3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

故

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3+\cdots+\lambda_na_n & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_n \\ -\lambda_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda_3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\lambda_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\lambda_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

3. 試找由一平面 $Ax+By+Cz=D$, $D\neq 0$ 上距離原點 $(0,0,0)$ 最近一點之座標。(10分)　**《喻超凡, 喻超弘** 103電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 ☞ 平面 E : $Ax+By+Cz=D$ 的法向量爲

$$\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$$

令原點 $O(0,0,0)$ 到平面最近的點爲 $P(x,y,z)$，則

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

且 $\overrightarrow{OP}\parallel\vec{n}$, 故

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=m(A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k})$$

則

$$\begin{cases} x=mA \\ y=mB \\ z=mC \end{cases}$$

代回平面方程式可得

$$A^2m+B^2m+C^2m=D$$

由上式可解得

$$m=\frac{D}{A^2+B^2+C^2}$$

即原點到平面最近點的坐標爲

$$x=mA=\frac{DA}{A^2+B^2+C^2}\ ,\ y=mB=\frac{DB}{A^2+B^2+C^2}$$

$$z=mC=\frac{DC}{A^2+B^2+C^2}$$

4. 投擲十顆公平的骰子, 其中五顆爲藍色骰子而另五顆爲綠色骰子, 試求下列事件之機率：
(1) 剛好二顆藍色骰子皆爲6點且剛好三顆綠色骰子皆爲偶數點數。(7分)
(2) 藍色骰子出現6點之數量同於綠色骰子出現6點之數量。(8分)

《喻超凡, 喻超弘 103電力、電子、電信、醫工高考》

《解》 ☞

(1) 藍色骰子剛好二顆骰子皆爲6點的機率爲 $C_2^5\times(\frac{1}{6})^2\times(\frac{5}{6})^3$

綠色骰子剛好三顆骰子皆爲偶數點數的機率爲 $C_3^5\times(\frac{1}{2})^3\times(\frac{1}{2})^2$

剛好二顆藍色骰子皆爲6點且剛好三顆綠色骰子皆爲偶數點數的機率爲

$$\{C_2^5\times(\frac{1}{6})^2\times(\frac{5}{6})^3\}\times\{C_3^5\times(\frac{1}{2})^3\times(\frac{1}{2})^2\}=0.0502347$$

(2) 0顆藍色及綠色骰子出現6點之機率爲 $\{C_0^5\times(\frac{5}{6})^5\}^2$

1顆藍色及綠色骰子出現6點之機率爲 $\{C_1^5\times(\frac{1}{6})\times(\frac{5}{6})^4\}^2$

2顆藍色及綠色骰子出現6點之機率爲 $\{C_2^5\times(\frac{1}{6})^2\times(\frac{5}{6})^3\}^2$

3顆藍色及綠色骰子出現6點之機率爲 $\{C_3^5\times(\frac{1}{6})^3\times(\frac{5}{6})^2\}^2$

4顆藍色及綠色骰子出現6點之機率爲 $\{C_4^5\times(\frac{1}{6})^4\times(\frac{5}{6})\}^2$

5顆藍色及綠色骰子出現6點之機率爲 $\{C_5^5\times(\frac{1}{6})^5\}^2$

故藍色骰子出現6點之數量同於綠色骰子出現6點之數量的機率爲

$$\{C_0^5\times(\frac{5}{6})^5\}^2+\{C_1^5\times(\frac{1}{6})\times(\frac{5}{6})^4\}^2+\{C_2^5\times(\frac{1}{6})^2\times(\frac{5}{6})^3\}^2$$
$$+\{C_3^5\times(\frac{1}{6})^3\times(\frac{5}{6})^2\}^2+\{C_4^5\times(\frac{1}{6})^4\times(\frac{5}{6})\}^2+\{C_5^5\times(\frac{1}{6})^5\}^2=0.349896$$

乙、測驗題部分 (50分)

1. 定義曲線 C 為 $x = t$, $y = t$ 及 $z = t^2$, 其中 $0 \le t \le 2$, 求函數 $\psi(x\,,\,y) = x + y$ 沿著曲線 C 之線積分 。

(A) 8 (B) 32/3 (C) $8\sqrt{2}$ (D) $26\sqrt{2}/3$

《**喻超凡, 喻超弘** 103電力、電子、電信、醫工高考》

《**解**》☞ (D) ; 因 C : $x = t$, $y = t$ 及 $z = t^2$, 其中 $0 \le t \le 2$, 故

$$ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\;dt = \sqrt{1 + 1 + (2t)^2}\;dt = \sqrt{2 + 4t^2}\;dt$$

則

$$\begin{aligned}
\int_C \psi(x\,,\,y)\,ds &= \int_C (x+y)\,ds = \int_{t=0}^{t=2} (t+t)\,\sqrt{2+4t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times (2+4t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{t=0}^{2} = \frac{1}{6} \times \{(18)^{\frac{3}{2}} - (2)^{\frac{3}{2}}\} \\
&= \frac{1}{6}\{54\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\} = \frac{26\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

2. 設 f 和 g 可微分 (differentiable) 純量函數 , $\vec{v}$ 和 $\vec{u}$ 為可微分向量函數 , 則有關它們的梯度 (gradient) , 散度 (divergence) 與拉普拉斯算子 (Laplace operator) 的等式 , 下列何者錯誤 ?

(A) $\mathrm{div}\,(f\,\vec{v}) = f\,\mathrm{div}(\vec{v}) + \vec{v}\cdot\nabla f$
(B) $\mathrm{div}\,(f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$
(C) $\nabla^2 f = \mathrm{div}\,(\nabla f)$
(D) $\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + f\nabla^2 g$

《**喻超凡, 喻超弘** 103電力、電子、電信、醫工高考》

《**解**》☞ (D) ; 因

$$\nabla^2(fg) \;=\; \nabla\cdot\nabla(fg)$$

$$
\begin{aligned}
&= \nabla\cdot(f\nabla g + g\nabla f)\\
&= f\nabla\cdot\nabla g + 2\nabla f\cdot\nabla g + g\nabla\cdot\nabla f\\
&= f\nabla^2 g + 2\nabla f\cdot\nabla g + g\nabla^2 f
\end{aligned}
$$

3. 令向量函數 $\vec{F}=[y^2\,,\,z\,,\,x^2]$, 曲線 C 為螺旋圓弧線 $\vec{r}=[2\cos t\,,\,2\sin t\,,\,t]$ 從 $(2\,,\,0\,,\,0)$ 到 $(-2\,,\,0\,,\,\pi)$，則線積分 $\int_C \vec{F}(\vec{r})\,dt$ 之值為何？

(A) $[\pi\,,\,\frac{1}{2}\pi^2\,,\,\pi]$ (B) $[\pi\,,\,\pi^2\,,\,\pi]$ (C) $[2\pi\,,\,\frac{1}{2}\pi^2\,,\,2\pi]$

(D) $[2\pi\,,\,\pi^2\,,\,2\pi]$ 《喻超凡, 喻超弘 103電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ (C)；C 的位置向量為

$$\vec{r}=[2\cos t\,,\,2\sin t\,,\,t]$$

故

$$\begin{cases} x = 2\cos t\\ y = 2\sin t\\ z = t\end{cases}$$

故點 $(2\,,\,0\,,\,0)$ 為 $t=0$，點 $(-2\,,\,0\,,\,\pi)$ 為 $t=\pi$，則

$$
\begin{aligned}
\int_C \vec{F}(\vec{r})\,dt &= \int_C [y^2\,,\,z\,,\,x^2]\,dt\\
&= \int_0^{\pi} [(4\sin^2 t)\,,\,t\,,\,(4\cos^2 t)]\,dt\\
&= \int_0^{\pi} [2(1-\cos 2t)\,,\,t\,,\,2(1+\cos 2t)]\,dt\\
&= \left.\left[(2t-\sin 2t)\,,\,\frac{t^2}{2}\,,\,(2t+\sin 2t)\right]\right|_0^{\pi}\\
&= \left[2\pi\,,\,\frac{\pi^2}{2}\,,\,2\pi\right]
\end{aligned}
$$