公職技師工程數學
102 年試題詳解

喻超凡　喻超弘編著

喻超凡數位企業有限公司

目錄

業精於勤　荒於嬉
行成於思　毀於隨

選擇超凡　成就非凡

喻超凡與您共勉之

1. 102年公務人員身心障礙人員電力、電子特考

甲、申論題部分 (50分)

1. 試利用拉氏轉換 (Laplace transform) 求解

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

其中 $x_i' = \dfrac{dx_i}{dt}$，$i = 1, 2$）。(15分)《**喻超凡, 喻超弘** 102電力、電子身障特考》

《解》 ☞ 原式可改寫成

$$\begin{cases} x_1' - 5x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_2' - x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \quad ; \quad x_1(0) = 0 , x_2(0) = 4 \tag{1}$$

對 (1) 式兩端取 L–T 可得

$$\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) - 5X_1(s) - 3X_2(s) = 0 \\ sX_2(s) - x_2(0) - X_1(s) - 3X_2(s) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\mathscr{L}\{x_1(t)\} = X_1(s)$、$\mathscr{L}\{x_2(t)\} = X_2(s)$，代回 (2) 式中整理可得

$$\begin{cases} (s-5)X_1(s) - 3X_2(s) = 0 \\ -X_1(s) + (s-3)X_2(s) = 4 \end{cases} \tag{3}$$

故

$$X_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & (s-3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s-5) & -3 \\ -1 & (s-3) \end{vmatrix}} = \frac{12}{12 - 8s + s^2} = \frac{3}{s-6} - \frac{3}{s-2}$$

$$X_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} (s-5) & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s-5) & -3 \\ -1 & (s-3) \end{vmatrix}} = \frac{4(-5+s)}{12 - 8s + s^2} = \frac{1}{s-6} + \frac{3}{s-2}$$

則

$$x_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X_1(s)\} = 3e^{6t} - 3e^{2t}$$
$$x_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X_2(s)\} = e^{6t} + 3\,e^{2t}$$

2. 試求函數 $\psi(x\,,\,y\,,\,z) = xy + yz + zx$ 於位置 $(1\,,\,2\,,\,3)$ 朝向點 $(0\,,\,1\,,\,2)$ 之方向導數。(10分)　《**喻超凡, 喻超弘** 102電力、電子身障特考》

《**解**》☞ 因

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k} = (y+z)\,\vec{i} + (x+z)\,\vec{j} + (y+x)\,\vec{k}$$

故

$$\nabla\psi(1\,,\,2\,,\,3) = 5\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

且 $(1\,,\,2\,,\,3)$ 朝向點 $(0\,,\,1\,,\,2)$ 的向量爲

$$\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

故 $\psi(x\,,\,y\,,\,z)$ 於位置 $(1\,,\,2\,,\,3)$ 朝向點 $(0\,,\,1\,,\,2)$ 之方向導數爲

$$D_{\vec{v}}\psi(1\,,\,2\,,\,3) = \nabla\psi(1\,,\,2\,,\,3)\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (5\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 3\,\vec{k})\cdot\frac{-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{3}} = -\frac{12}{\sqrt{3}}$$

3. 假設隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 如下：

$$f(x\,,\,y) = \begin{cases} k\,xy & ,\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1\ ,\ x + y \le 1 \\ 0 & ,\ \text{elsewhere} \end{cases}$$

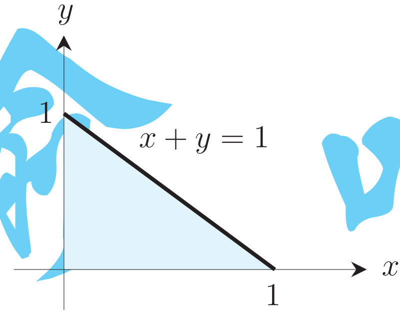
(1) 試求 k 值。(5分)

(2) 試求隨機變數 X 的邊際分布函數 (marginal distribution function)。(5分)

(3) 試計算出隨機變數 X 的期望值 (mean value)。亦即 $E(X)$。(5分)

《**喻超凡, 喻超弘** 102電力、電子身障特考》

《**解**》☞



(1) 因

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x\,,\,y)\,dxdy &= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x} k\,xy\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} k\,x\,\{\frac{1}{2}\,y^2\,\}\Big|_{y=0}^{y=1-x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1} k\,x(1-x)^2\,dx \\
&= \frac{k}{24} = 1
\end{aligned}$$

故 $k = 24$。

(2) X 的邊際分布函數

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x\,,\,y)\,dy \\
&= \int_{y=0}^{y=1-x} 24\,x\,y\,dy \\
&= 12(1-x)^2 x \quad (0 \le x \le 1)
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_X(x)\,dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} x\,\{12\,(1-x)^2 x\}\,dx \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

4. 試求出滿足方程式 $\sin z = \cosh 4$ 之所有的根，此處 $z = x + iy$ 爲複數 (complex number)。(10分) **《喻超凡，喻超弘** 102電力、電子身障特考》