喻超凡翻轉教室叢書

翻轉工程數學 下

Advanced Engineering Mathematics

喻超凡、喻超弘、喻婕 編著

喻超凡數位企業有限公司
http://www.superyu.idv.tw

喻超凡翻轉教室叢書
翻轉工程數學 下
喻超凡 喻超弘 喻婕 編著
喻超凡 Superyu

喻超凡老師的家

超凡小鋪網址：http://www.pcstore.com.tw/superyu

工數神父喻超凡 Facebook **網址**：
http://www.facebook.com/mathsuperyu

喻超凡雲端翻轉數學教室：http://www.superyu.idv.tw

序

數學是所有科學之母，洩漏天機的語言，所以不論是國內或是國外，只要是研習工程科學的科系，都將工程數學這一門學科，列為必修的課程，但是由於這一門課程的內容，過度的艱澀枯燥難學，因此就成為很多剛學習這門課程同學的一大夢魘，不知如何正確的去學習，不久就淪為死背公式答案的機器了，根本無法一窺工程數學這一門學問之精髓，更遑論要分析或是解決工程上的問題。

有鑑於此，喻超凡博士參考國內外著名的工程數學叢書 (請參考參考文獻)，以及喻超凡博士在全國各大著名的補習班及國立大學任教工程數學三十多年的教學心得，提綱挈領精編細撰，將工程數學中重要的觀念、公式及口訣，以結構化的方式放在每一章節的開始，並且精選國內外，各大著名的大學理工科系所研究所入學考的試題，加入每一章節的精選範例中，做整體詳細的思路與題型的分析和講解說明，同時在每一章節最後的挑戰範例中，加入觀念具有挑戰性或較為艱澀的題目，以及工程數學中有關高等微積分、高等線性代數等純理論的定理証明，精編細撰出這本"翻轉工程數學"，期能幫助同學在短時間內對工程數學能作全盤性的認識及了解，一窺工程數學之美，翻轉成績，翻轉未來。

最後喻超凡博士將工程數學中重要理論的定義、定理、公式的來源，及發展的過程和重要的數學家的生平事蹟... 等等的參考文獻，以註腳的方式加於各章節中，以增加閱讀本書的趣味性，進而使讀者能在趣味中了解工程數學的發展過程及整體的全貌。同時喻超凡博士亦有架設網路學校，將工程數學的基礎課程以開放課程的方式，放在雲端翻轉教室中，供同學參考及翻轉學習，網路學校的網址 http://www.superyu.idv.tw。

本書雖經多次修定及校對，但仍難免有所疏漏之處，敬請各位讀者不吝賜教。本書已獲全國各大補習班及學校採用為教科書，筆者在此致最大的謝意。

喻超凡雲端教室

喻超凡

2016. 2.

目錄

第 10 章 偏微分方程式及其應用

10.1 概論

10.1.1 基本定義

1. 定義 :

描述多變數函數及其偏導數之間的關係式 , 稱爲偏微分方程 , 簡稱爲PDE 。

2. 基本名詞

(1) 階數 : PDE 中所含的最高階偏導數之階數 , 則稱爲該 PDE 的階數 。

(2) 線性 : 在 PDE 中未知函數以及其偏導數 , 均滿足

(a) 次數均爲 1 次 。

(b) 無相互的乘項 。

(c) 無非線性函數 。

則稱該 PDE 爲線性的 PDE 。

(3) 擬線性 : 若 PDE 中最高階的偏導數之次數均爲 1 次, 而且無互乘項, 則稱該 PDE 爲擬線性 PDE 。

(4) 非線性 : 若 PDE 不爲線性, 亦不爲擬線性時, 稱該 PDE 爲非線性 PDE 。

3. 偏微分方程式解之分類

(1) 通解 (general solution) : 滿足 PDE 且包含任意函數之解 。

(2) 全解 (complete solution) : 滿足 PDE 且包含任意常數之解 。

(3) 特解 (particular solution) : 滿足 PDE 且不含任意函數與任意常數之解 。

10.1.2 二階偏微分方程式的分類

設雙變數二階PDE 爲

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=D \tag{10.1}$$

1. 若 A、B、C、D 均爲 x、y、u、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$ 的函數時，則 10.1 式稱爲二階擬線性 PDE

(1) 若 $B^2-4AC>0$, 則稱爲雙曲線型 (Hyperbolic) PDE。

(2) 若 $B^2-4AC=0$, 則稱爲抛物線型 (Parabolic) PDE。

(3) 若 $B^2-4AC<0$, 則稱爲橢圓型 (Elliptic) PDE。

2. 若 A、B、C 均爲 x、y 之函數，並且 D 爲 x、y、u、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$ 的函數時, 則 10.1 式稱爲二階半線性 (semilinear) PDE 。

3. 若 A、B、C 均爲 x、y 之函數，並且

$$D=f_1(x\,,\,y)\frac{\partial u}{\partial x}+f_2(x\,,\,y)\frac{\partial u}{\partial y}+f_3(x\,,\,y)u+f_4(x\,,\,y)$$

則稱 10.1 式爲線性 PDE 。

精選範例

1. 線性偏微分方程式

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}=F(x\,,\,y\,,\,u\,,\,u_x\,,\,u_y)$$

之類型有三。試列出各類型之名稱、代表條件 (A、B、C之組合) 及常見的代表數學式 (如 Laplace、熱傳導及波動方程式)。 《中山海環》

《解》 ☞

(1) $B^2-4AC>0$, 爲雙曲線型 PDE , 如波動方程式 $u_{xx}=u_{tt}$ 。

(2) $B^2-4AC=0$, 拋物線型 PDE , 如熱傳方程式 $u_{xx}=u_t$ 。

(3) $B^2-4AC<0$, 爲橢圓型 PDE , 如 Laplace 方程式 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 。

2. 下列偏微分方程式 : (1) 式稱爲拋物線型, (2) 式稱爲橢圓型, 以大地工程問題各舉一例, 說明式中各項變數代表意義, 以及偏微分方程式解在大地工程之應用 。

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0 \tag{2}$$

《台科大營建乙》

《解》 ☞

(1) Terzaghi's 壓密方程式

$$c_v\frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2}=\frac{\partial u_e}{\partial t}-\frac{\partial \sigma_v}{\partial t}$$

c_v：壓密係數。u_e：超孔隙壓力。z：深度。t：時間。σ_v：總應力。在一維的壓密問題中，一般 $\dfrac{\partial \sigma_v}{\partial t} = 0$，即可得

$$c_v \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} = \frac{\partial u_e}{\partial t}$$

(2) 在二維的 seepage 中 stream function ϕ 滿足

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

3. To solve a PDE, we need to have boundary and initial conditions. There are also three types of boundary conditions: Dirichlet, Neumann, and Robin(mixed) conditions. Please clearly state each type of boundary conditions.

《中正機械》

《解》 ☞ 設 u 爲 PDE 中的待求的多變數函數，若其邊界給定值的方式以

(a) $u\Big|_{\text{on boundary}} = u_0$，則稱該 B.C. 爲 Dirichlet condition。

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\text{on boundary}} = u_1$，其中 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 爲 u 在邊界法向量方向的方向導數，則稱該 B.C. 爲 Neumann condition。

(c) $\left\{\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu\right\}_{\text{on boundary}} = u_2$（$h$ 爲常數），則稱該 B.C. 爲 Robin (mixed) condition。

10.2 波動方程式(雙曲線型PDE)

10.2.1 概論

1. ∇^2 運算子

(1) 直角座標系統：

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(2) 圓柱座標系統：

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(3) 球座標系統：$x = r\sin\phi\cos\theta$ 、$y = r\sin\phi\sin\theta$ 、$z = r\cos\phi$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

2. 波動方程式

波動方程爲雙曲線型二階PDE , 標準式爲

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{10.2}$$

其中 ϕ 稱爲系統的響應 (response), c 稱爲波速與介質有關 , $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ 稱爲質點速度 。

3. 常見物理問題波速之求法

(1) 繩索的上下振動

$$c^2 = \frac{T}{\rho} \quad \begin{cases} T\text{: 繩索的張力} \\ \rho\text{: 繩索單位長度的質量} \end{cases}$$

(2) 直長桿的軸向振動

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad \begin{cases} E\text{: 桿的楊氏係數} \\ \rho\text{: 桿的密度} \end{cases}$$

(3) 氣體中聲波的軸向振動

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} \quad \begin{cases} P\text{: 氣體的壓力} \\ \rho\text{: 氣體的密度} \end{cases}$$

(4) 電纜中的電波訊號

$$c^2 = \frac{1}{LC} \quad \begin{cases} L\text{: 電感} \\ C\text{: 單位長度之電容} \end{cases}$$

(5) 薄膜的上下振動

$$c^2 = \frac{T}{\rho} \quad \begin{cases} T\text{: 薄膜的張力} \\ \rho\text{: 單位面積的質量} \end{cases}$$

10.2.2 分離變數法解齊次波動方式

1. 步驟 一 :

應用變數分離法 (Method of Separating Variables) 將 10.2式分解爲數個 ODE 。(雙變數函數可分解成兩個 ODE , 三變數函數可分解成三個 ODE)

2. 步驟二 :

求步驟一中且滿足邊界條件的微分方程式的解 。

3. 步驟三 :

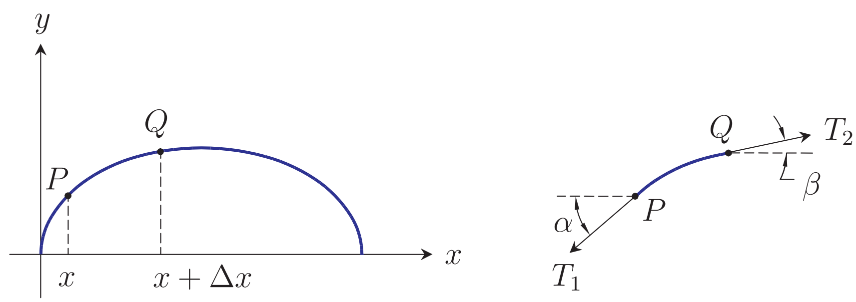
將第二步所求之解, 以線性的方式組合成全解, 並利用初始值條件及 Fourier 級數或 Fourier 積分的性質, 求出未定係數 。

精選範例

1. Derive the one-dimensional wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c^2 = \frac{T}{\rho})$$

where $u = u(x\,,\,t)$ is the deflection of a vibration string at any point and any time. 《成大水利》



《解》 ☞ 相關假設：

(1) 弦的單位長質量為 ρ，且變形為 $u(x\,,\,t)$。

(2) 弦為完全彈性體，不承受 bending。

(3) 重力影響不計。

(4) 只考慮橫向運動 (u 方向)。

考慮如上圖一小段細弦：在 x 方向的力平衡

$$T_2 \cos\beta = T_1 \cos\alpha = T \text{ (常數)} \tag{1}$$

在 u 方向的力平衡

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = (\rho\Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

由 $\frac{(2)}{(1)}$ 可得

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = (\frac{\rho\Delta x}{T})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\tan\beta-\tan\alpha=(\frac{\rho\Delta x}{T})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}}{\Delta x}=\frac{\rho}{T}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

即可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

其中 $c^2=\dfrac{T}{\rho}$

2. $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\quad 0<x<\ell\ ,\ t>0$

(1) 邊界條件 $\phi(x\,,\,t)\big|_{x=0}=\phi(x\,,\,t)\big|_{x=\ell}=0$

(2) 初始條件 $\phi(x\,,\,0)=f(x)$, $\phi_t(x\,,\,0)=g(x)$ 。 《台科大機械》

《提示》 ➥ $\phi(0\,,\,t)=\phi(\ell\,,\,t)=0$ 其物理意義爲長度爲 ℓ 的簡支樑 。

《解》 ☞

(1) 令 $\phi(x\,,\,t)=X(x)T(t)$ 故

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=X''(x)T(t)\ ,\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=X(x)\ddot{T}(t)$$

代回 PDE 中

$$X''(x)T(t)=\frac{1}{c^2}X(x)\ddot{T}(t)$$

整理可得

$$\frac{X''}{X}=\frac{\ddot{T}}{c^2T}=-\lambda\quad(\lambda\text{ 爲常數})$$

故

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ \ddot{T}(t)+\lambda c^2T(t)=0\end{cases}\tag{1}$$

(2) 由 B.C.

$$\phi(0\,,\,t)=X(0)T(t)=0$$

可得 $X(0)=0$ 或 $T(t)=0$, 因 $T(t)=0$ 會使得 $\phi(x\,,\,t)=X(x)T(t)=0$, 即方程式只有零解 (trivial 解) , 無非零解 , 因此取 $X(0)=0$, 同理

$$\phi(\ell\,,\,t)=0=X(\ell)T(t)$$

可得 $X(\ell)=0$, 現解

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\ ,\ \ X(0)=X(\ell)=0 \tag{2}$$

Sturm–Liouville 邊界值問題

(i) $\lambda<0$, 令 $\lambda=-p^2$ $(0<p<\infty)$ 代入 (2) 式 , 可得

$$X''(x)-p^2X(x)=0$$

其通解為

$$X(x)=c_1\sinh px+c_2\cosh px$$

代入邊界條件 $X(0)=0$, 可得 $c_2=0$, $X(\ell)=0=c_1\sinh p\ell$, 可得 $c_1=0$, 故 $X(x)=0$, 則 $\phi(x,t)=X(x)T(t)=0$ 無非零解 。

(ii) $\lambda=0$, 代入 (2) 式 , 可得 $X''(x)=0$, 其通解為

$$X(x)=c_1+c_2x$$

代入邊界條件 $X(0)=0$, 可得 $c_1=0$, $X(\ell)=0=c_2\ell$, 可得 $c_2=0$, 故 $X(x)=0$, 則 $\phi(x,t)=X(x)T(t)=0$ 無非零解 。

(iii) $\lambda>0$, 令 $\lambda=p^2$ $(0<p<\infty)$ 代入 (2) 式 , 可得

$$X''(x)+p^2X(x)=0$$

其通解為

$$X(x)=c_1\sin px+c_2\cos px$$

代入邊界條件 $X(0)=0$, 可得 $c_2=0$, $X(\ell)=0=c_1\sin p\ell$, 令 $c_1\neq 0$, 可得 $\sin p\ell=0$, 故

$$p=\frac{n\pi}{\ell}\quad (n=1\,,\,2\,,\,3\,,\,\cdots)$$

則

$$X(x)=c_1\sin\frac{n\pi x}{\ell}=X_n\quad (n=1\,,\,2\,,\,3\,,\,\cdots)$$

將 $\lambda=p^2=(\frac{n\pi}{\ell})^2$ 代回 (1) 式中可得

$$\ddot{T}+(\frac{cn\pi}{\ell})^2T=0$$

上式為二階常係數 ODE, 其解為

$$T(t)=d_1\cos\frac{cn\pi t}{\ell}+d_2\sin\frac{cn\pi t}{\ell}=T_n$$

因此

$$\begin{aligned}\phi_n(x\,,\,t) &= T_n(t)X_n(x) = (d_1\cos\frac{cn\pi t}{\ell} + d_2\sin\frac{cn\pi t}{\ell})c_1\sin\frac{n\pi x}{\ell}\\ &= (A_n\cos\frac{cn\pi t}{\ell} + B_n\sin\frac{cn\pi t}{\ell})\sin\frac{n\pi x}{\ell}\end{aligned}$$

(3) 由重疊原理知

$$\phi(x\,,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{cn\pi t}{\ell} + B_n\sin\frac{cn\pi t}{\ell})\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

故

$$\phi_t(x\,,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-A_n\frac{cn\pi}{\ell}\sin\frac{cn\pi t}{\ell} + B_n\frac{cn\pi}{\ell}\cos\frac{cn\pi t}{\ell})\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

代入初始條件

$$\phi(x\,,\,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

再由 Fourier – sine 級數可知

$$A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \frac{<f(x)\,,\ \sin\frac{n\pi x}{\ell}>}{<\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,,\ \sin\frac{n\pi x}{\ell}>} \tag{3}$$

同理

$$\phi_t(x\,,\,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{cn\pi}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

故

$$\frac{cn\pi}{\ell}B_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}g(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \frac{<g(x)\,,\ \sin\frac{n\pi x}{\ell}>}{<\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,,\ \sin\frac{n\pi x}{\ell}>} \tag{4}$$

由 (3)、(4) 兩式可求出 A_n、B_n，再將 A_n、B_n 代入 $\phi(x\,,\,t)$ 中即爲所求。

3. $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\quad 0 < x < \ell\,,\ t > 0$

(1) 邊界條件 $\phi_x(x\,,\,t)\big|_{x=0} = \phi_x(x\,,\,t)\big|_{x=\ell} = 0$

(2) 初始條件 $\phi(x\,,\,0) = f(x)$，$\phi_t(x\,,\,0) = g(x)$。 《清大動機》

《解》 ☞

(1) 令 $\phi(x\,,t)=X(x)T(t)$ 故

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=X''(x)T(t)\;,\;\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=X(x)\ddot{T}(t)$$

代回 PDE 中

$$X''(x)T(t)=\frac{1}{c^2}X(x)\ddot{T}(t)$$

整理可得

$$\frac{X''}{X}=\frac{\ddot{T}}{c^2T}=-\lambda\quad(\lambda\text{ 爲常數})$$

故

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ \ddot{T}(t)+\lambda c^2T(t)=0\end{cases}\tag{1}$$

(2) 由 B.C.

$$\phi_x(0\,,t)=X'(0)T(t)=0$$

可得 $X'(0)=0$ 或 $T(t)=0$，因 $T(t)=0$ 會使得 $\phi(x\,,t)=X(x)T(t)=0$，即方程式只有零解 (trivial 解)，無非零解，因此取 $X'(0)=0$，同理

$$\phi_x(\ell\,,t)=0=X'(\ell)T(t)$$

可得 $X'(\ell)=0$，現解

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\;,\;X'(0)=X'(\ell)=0\tag{2}$$

Sturm–Liouville 邊界值問題

(i) $\lambda<0$，令 $\lambda=-p^2$ $(0<p<\infty)$ 代入 (2) 式，可得

$$X''(x)-p^2X(x)=0$$

其通解爲

$$X(x)=c_1\sinh px+c_2\cosh px$$

且

$$X'(x)=c_1p\cosh px+c_2p\sinh px$$

代入邊界條件 $X'(0)=0$，可得 $c_1=0$，$X'(\ell)=0=c_2p\sinh p\ell$，可得 $c_2=0$, 故 $X(x)=0$，則 $\phi(x,t)=X(x)T(t)=0$ 無非零解。

(ii) $\lambda=0$，代入 (2) 式，可得 $X''(x)=0$，其通解爲

$$X(x)=c_1+c_2x$$

故 $X'(x) = c_2$，代入邊界條件 $X'(0) = X'(\ell) = 0$，可得 $c_2 = 0$，故令 $c_1 \neq 0$，則 $X(x) = c_1 = X_0$，將 $\lambda = 0$ 代回 (1) 式中可得，$\ddot{T}(t) = 0$，故 $T(t) = d_1 + d_2 t = T_0$，則

$$\phi_0 = T_0 X_0 = A_0 + B_0 t$$

(iii) $\lambda > 0$, 令 $\lambda = p^2$ $(0 < p < \infty)$ 代入 (2) 式，可得

$$X''(x) + p^2 X(x) = 0$$

其通解為

$$X(x) = c_1 \sin px + c_2 \cos px$$

且

$$X'(x) = c_1 p \cos px - c_2 p \sin px$$

代入邊界條件 $X'(0) = 0$，可得 $c_1 = 0$，$X'(\ell) = 0 = -c_2 p \sin p\ell$，令 $c_2 \neq 0$, 可得 $\sin p\ell = 0$，故

$$p = \frac{n\pi}{\ell} \quad (n = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,\cdots)$$

則

$$X(x) = c_2 \cos\frac{n\pi x}{\ell} = X_n \quad (n = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,\cdots)$$

將 $\lambda = p^2 = (\frac{n\pi}{\ell})^2$ 代回 (1) 式中可得

$$\ddot{T} + (\frac{cn\pi}{\ell})^2 T = 0$$

上式為二階常係數 ODE, 其解為

$$T(t) = d_1 \cos\frac{cn\pi t}{\ell} + d_2 \sin\frac{cn\pi t}{\ell} = T_n$$

因此

$$\begin{aligned}\phi_n(x\,,\,t) &= T_n(t)X_n(x) = (d_1 \cos\frac{cn\pi t}{\ell} + d_2 \sin\frac{cn\pi t}{\ell})c_2 \cos\frac{n\pi x}{\ell} \\ &= (A_n \cos\frac{cn\pi t}{\ell} + B_n \sin\frac{cn\pi t}{\ell}) \cos\frac{n\pi x}{\ell}\end{aligned}$$

(3) 由重疊原理知

$$\begin{aligned}\phi(x\,,\,t) &= \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x\,,\,t) \\ &= A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\frac{cn\pi t}{\ell} + B_n \sin\frac{cn\pi t}{\ell}) \cos\frac{n\pi x}{\ell}\end{aligned}$$

故

$$\phi_t(x\,,\,t)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}(-A_n\frac{cn\pi}{\ell}\sin\frac{cn\pi t}{\ell}+B_n\frac{cn\pi}{\ell}\cos\frac{cn\pi t}{\ell})\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

代入初始條件

$$\phi(x\,,\,0)=f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

再由 Fourier – cosine 級數可知

$$A_0=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)dx=\frac{<f(x)\,,\,1>}{<1\,,\,1>} \tag{3}$$

$$A_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx=\frac{<f(x)\,,\,\cos\frac{n\pi x}{\ell}>}{<\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,,\,\cos\frac{n\pi x}{\ell}>} \tag{4}$$

同理

$$\phi_t(x\,,\,0)=g(x)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{cn\pi}{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

故

$$B_0=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}g(x)\,dx=\frac{<g(x)\,,\,1>}{<1\,,\,1>} \tag{5}$$

$$\frac{cn\pi}{\ell}B_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}g(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx=\frac{<g(x)\,,\,\cos\frac{n\pi x}{\ell}>}{<\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,,\,\cos\frac{n\pi x}{\ell}>} \tag{6}$$

由 (3)、(4)、(5)、(6) 等式可求出 A_0、A_n、B_0、B_n，再代入 $\phi(x\,,\,t)$ 中即爲所求。

4. 試求 $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ 其中 $0<x<\infty$、$t>0$ 且

(1) 邊界條件 $\phi(0\,,\,t)=0$、$\phi(\infty\,,\,t)=$bounded

(2) 初始條件 $\phi(x\,,\,0)=f(x)$、$\phi_t(x\,,\,0)=g(x)$。 《台大土木》

《解》 ☞

(1) 令 $\phi(x\,,\,t)=X(x)T(t)$ 故

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=X''(x)T(t)\;,\;\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=X(x)\ddot{T}(t)$$

代回 PDE 中

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{c^2}X(x)\ddot{T}(t)$$

整理可得

$$\frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{c^2T} = -\lambda \quad (\lambda \text{ 為常數})$$

故

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ \ddot{T}(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(2) 由 B.C.

$$\phi(0\,,\,t) = X(0)T(t) = 0$$

可得 $X(0) = 0$ 或 $T(t) = 0$，因 $T(t) = 0$ 會使得 $\phi(x\,,\,t) = X(x)T(t) = 0$，即方程式只有零解 (trivial 解)，無非零解，因此取 $X(0) = 0$, 同理

$$\phi(\infty\,,\,t) = \text{bounded} = X(\infty)T(t)$$

可得 $X(\infty) = \text{bounded}$，現解

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0\,,\;\; X(0) = 0\,,\;\; X(\infty) = \text{bounded} \tag{2}$$

(i) $\lambda < 0$，令 $\lambda = -p^2$ $(0 < p < \infty)$ 代入 (2) 式，可得

$$X''(x) - p^2 X(x) = 0$$

其通解為

$$X(x) = c_1 \sinh px + c_2 \cosh px$$

代入邊界條件 $X(0) = 0$，可得 $c_2 = 0$，$X(\infty) = \text{bounded}$，可得 $c_1 = 0$ (因 $\sinh\infty \to \infty$)，故 $X(x) = 0$，則 $\phi(x,t) = X(x)T(t) = 0$ 無非零解。

(ii) $\lambda = 0$，代入 (2) 式，可得 $X''(x) = 0$，其通解為

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

代入邊界條件 $X(0) = 0$，可得 $c_1 = 0$，$X(\infty) = \text{bounded}$，可得 $c_2 = 0$，故 $X(x) = 0$，則 $\phi(x,t) = X(x)T(t) = 0$ 無非零解 。

(iii) $\lambda > 0$，令 $\lambda = p^2$ $(0 < p < \infty)$ 代入 (2) 式，可得

$$X''(x) + p^2 X(x) = 0$$

其通解為

$$X(x) = c_1 \sin px + c_2 \cos px$$

代入邊界條件 $X(0)=0$，可得 $c_2=0$，

$$X(\infty)=\text{bounded}=c_1\sin(p\cdot\infty)$$

令 $c_1\neq 0$，可得 $0<p<\infty$，故

$$X(x)=c_1\sin px=X_p\quad(0<p<\infty)$$

將 $\lambda=p^2$ 代回 (1) 式中可得

$$\ddot{T}+(pc)^2T=0$$

上式爲二階常係數 ODE, 其解爲

$$T(t)=d_1\cos pct+d_2\sin pct=T_p$$

因此

$$\begin{aligned}\phi_p(x\,,\,t)&=T_p(t)X_p(x)=(d_1\cos pct+d_2\sin pct)c_1\sin px\\&=(A_p\cos pct+B_p\sin pct)\sin px\quad(0<p<\infty)\end{aligned}$$

(3) 由重疊原理知

$$\phi(x\,,\,t)=\int_0^\infty\phi_p\,dp=\int_0^\infty(A_p\cos pct+B_p\sin pct)\sin px\,dp$$

故

$$\phi_t(x\,,\,t)=\int_0^\infty(-pcA_p\sin pct+pcB_p\cos pct)\sin px\,dp$$

代入初始條件

$$\phi(x\,,\,0)=f(x)=\int_0^\infty A_p\sin px\,dp$$

再由 Fourier – sine 積分可知

$$A_p=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin px\,dx\tag{3}$$

同理

$$\phi_t(x\,,\,0)=g(x)=\int_0^\infty pcB_p\sin px\,dp$$

故

$$pcB_p=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(x)\sin px\,dx\tag{4}$$

由 (3)、(4) 兩式可求出 A_p、B_p，再將 A_p、B_p 代入 $\phi(x\,,\,t)$ 中即爲所求。