公職技師工程數學

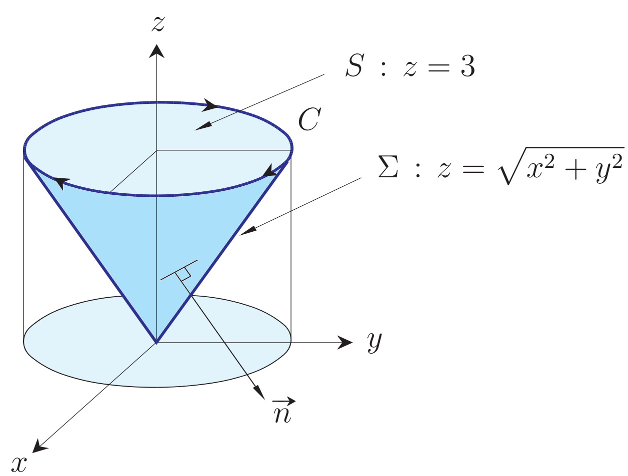
102歷試詳解

勘誤內容

$$y_2(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y_2(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+k}-\frac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}\}=\cos\sqrt{k}\,t-\sin\sqrt{3k}\,t$$

2. 令 Σ 是圓錐 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2\le 9$ 的表面 , 若 $\vec{n}$ 爲 Σ 之單位法向量且 $\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j}-xyz\vec{k}$ 。求 $\int_{\Sigma}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,d\sigma$ 。(15%)

《**喻超凡**, **喻超弘** 102鐵路電力、電子特考》



《**解**》☞ 曲面 Σ 及 S 的方程式爲

$$\begin{cases}\Sigma\ :\ \boxed{z=\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ z>0\\ S\ :\ z=3\ ,\ x^2+y^2\le 9\end{cases}$$

則曲線 C 爲 Σ 之邊界曲線 , 同時亦爲S 之邊界曲線 (如圖) 。令 Σ 的單位法向量 $\vec{n}$ 爲朝外的方向 , 故 S 的單位法向量 $\vec{n}=-\vec{k}$ (如圖), 且

$$(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ -y&x&-xyz\end{vmatrix}\cdot(-\vec{k})=-2$$

故由 Stokes's 定理可得

$$\iint_{\Sigma}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}d\sigma\ =\ \oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

《解》☞ (B)；令

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$Proj_s w^T = A(A^TA)^{-1}A^Tw^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

10. 令 $\boldsymbol{x} = [1 \;\; 3 \;\; 2]^T$，$\boldsymbol{y}_1 = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$，$\boldsymbol{y}_2 = [1 \;\; -1 \;\; 0]^T$，$\boldsymbol{y}_3 = [1 \;\; 0 \;\; 0]^T$ 且定義 L 爲 $\mathbb{R}^3$ 至 $\mathbb{R}^3$ 相對於基底 (basis) $[\boldsymbol{y}_1 \;\; \boldsymbol{y}_2 \;\; \boldsymbol{y}_3]$ 之線性轉換 (linear transformation)

$$L(\sum_{i=1}^{3} c_i\boldsymbol{y}_i) = (2c_1 + c_3)\boldsymbol{y}_1 - (2c_2 + c_3)\boldsymbol{y}_2 + (c_1 + c_2 + c_3)\boldsymbol{y}_3$$

則 $L(\boldsymbol{x}) = ?$

(A) $\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

《喻超凡, 喻超弘 102鐵路電力、電子特考》

《解》☞ (C)；因

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

可解得 $c_1 = 2$、$c_2 = -1$、$c_3 = 0$, 故

$$L(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2c_1 + c_3 \\ -(2c_2 + c_3) \\ c_1 + c_2 + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

《解》 ☞ (D) ; $\nabla \times (\nabla \psi) = 0$

14. 若將三維空間中之曲線 C 以參數表示法表示為 $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t$; 且 $0 \le t \le \pi$, 則曲線 C 之長度為：

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\pi^2$ (B) $\dfrac{3}{2}\pi^2$ (C) $\sqrt{5}\,\pi$ (D) 3π

《喻超凡, 喻超弘 102鐵路電力、電子特考》

《解》 ☞ (C) ;

$$ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\ dt = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + 1}\ dt = \sqrt{5}\ dt$$

故

$$S = \int_C ds = \int_{t=0}^{t=\pi} \sqrt{5}\ dt = \sqrt{5}\ \pi$$

15. 求解微分方程式 $xy' = \dfrac{y^2}{2} + y$, 則其解為何 ?

(A) $y = \dfrac{x}{c-x}$ (B) $y = \dfrac{x}{2(c-x)}$ (C) $y = \dfrac{2x}{c-x}$ (D) $y = \dfrac{2}{c-x}$

《喻超凡, 喻超弘 102鐵路電力、電子特考》

《解》 ☞ (C) ; 原式可改寫成

$$\frac{dy}{\frac{y^2}{2} + y} = \frac{dx}{x}$$

兩端積分可得

$$\ln|y| - \ln|y+2| = \ln|x| + k$$

《解》☞ (B)；令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$5m^2 - 3.5m + 0.6 = 0 \;\Rightarrow\; m = 0.3\,,\, 0.4$$

故

$$y(x) = c_1 e^{0.4x} + c_2 e^{0.3x}$$

15. 求解微分方程 $y^{(4)} - 29y'' + 100y = 0$, 其解爲:
(A) $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x}$
(B) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{5x} + c_4e^{-5x}$
(C) $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + c_3e^{2x} + c_4xe^{2x}$
(D) $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{5x} + c_4xe^{5x}$
《喻超凡, 喻超弘 102電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ (B)；令 $y = e^{mx}$ 代回 ODE 中可得

$$m^4 - 29m^2 + 100 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{m = \pm 2\,,\, \pm 5}$$

故

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{5x} + c_4e^{-5x}$$

16. 微分方程式 $x^3(1-x)y''+2xy'+y = \sin(x)$ 有幾個奇異點 (singular points)?
(A) 2個　(B) 3個　(C) 4個　(D) 無窮多個
《喻超凡, 喻超弘 102電力、電子、電信、醫工高考》

《解》☞ (A)；原式可改寫成

$$y'' + \frac{2}{x^2(1-x)}y' + \frac{1}{x^3(1-x)}y = \frac{\sin x}{x^3(1-x)}$$

乙、測驗題部分 (50分)

1. 下列何者為拋物柱面 $z=x^2$ 的位置向量參數表示式, 其中 u , v 為變數 ?

(A) $u\vec{i}+u\vec{j}+u^2\vec{k}$ (B) $u\vec{i}+v\vec{j}+u^2\vec{k}$ (C) $v\vec{i}+v\vec{j}+u^2\vec{k}$

(D) $v\vec{i}+v\vec{j}+v^2\vec{k}$ **《喻超凡, 喻超弘** 102地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (B) ; 令 $x=u$ 、$y=v$, 則 $z=x^2=u^2$, 故位置向量為

$$\vec{r}=x\vec{i}+\boxed{y\vec{j}+z\vec{k}}=u\vec{i}+v\vec{j}+u^2\vec{k}$$

2. 下列何者為 $\oint_C 2x\cos(2y)dx-2x^2\sin(2y)\,dy$ 之值 , 其中 C 為一圓 : $x^2+y^2=4$ (定義逆時針方向為正) ?

(A) $-3\sqrt{2}$ (B) 0 (C) $3\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{7}$

《喻超凡, 喻超弘 102地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (B) ; 因 C : $x^2+y^2=4$, 由 Green's 定理可知

$$\begin{aligned}&\oint_C 2x\cos(2y)dx-2x^2\sin(2y)\,dy\\
=&\iint_D\{\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2\sin 2y)-\frac{\partial}{\partial y}(x\cos 2y)\}\,dxdy\\
=&\iint_D\{-4x\sin 2y+2x\sin 2y\}\,dxdy\\
=&\iint_D(-2x\sin 2y)\,dxdy\\
=&\int_{y=-2}^{y=2}\int_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}}(-2x\sin 2y)\,dxdy=0\end{aligned}$$

3. 試求向量場 $\vec{v} = \sinh(x-z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (z-y^2)\vec{k}$ 的 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v})$ 值？

(A) -2 (B) 0 (C) $\sinh(x-z)$ (D) $2y$

《喻超凡, 喻超弘 102地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (B)；$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$

4. 有一矩陣 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，則以下何者爲行列式$\det(B^5)$ 的值？

(A) 1 (B) 5 (C) 32 (D) -32

《喻超凡, 喻超弘 102地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (D)；

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

則 $\det(B^5) = \det(B)^5 = (-2)^5 = -32$

5. 下列矩陣何者非屬基本矩陣 (elementary matrices)？

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

《喻超凡, 喻超弘 102地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (B)

6. 在螺旋圓弧線 $\vec{r}(t)=[3\cos t\ ,\ 3\sin t\ ,\ 4t]$ 之上，從點 $P:(3,0,0)$ 到點 $Q:(-3,0,20\pi)$ 的弧長 (arc length) 為何？
(A) 20π　(B) 25π　(C) 30π　(D) 40π
《**喻超凡，喻超弘** 102地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (B)；因

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=[-3\sin t\ ,\ 3\cos t\ ,\ 4]$$

故 $ds=|\dfrac{d\vec{r}}{dt}|dt=5\,dt$，且在 $P:(3,0,0)$ 時 $t=0$，在 $Q:(-3,0,20\pi)$ 時 $t=5\pi$，則

$$S=\int_{t=0}^{t=5\pi}ds=\int_{t=0}^{t=5\pi}5\,dt=25\pi$$

7. 以下那一組是由基底 $B=\{[3\ \ 4]\ ,\ [1\ \ 0]\}$ 經由 Gram-Schmidt 正交程序轉換而成的正交基底？
(A) $\{[3\ \ 4]\ ,\ [\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{4}]\}$　(B) $\{[3\ \ 4]\ ,\ [\frac{15}{24}\ \ -\frac{15}{32}]\}$
(C) $\{[3\ \ 4]\ ,\ [\frac{16}{25}\ \ -\frac{12}{25}]\}$　(D) $\{[3\ \ 4]\ ,\ [-\frac{8}{22}\ \ \frac{6}{22}]\}$
《**喻超凡，喻超弘** 102地方特考電力、電子工程》

《解》 ☞ (C)；令對應的正交基底為 $\{\boldsymbol{u}_1\ ,\ \boldsymbol{u}_2\}$，則 $\boldsymbol{u}_1=[3\ \ 4]$，且

$$\boldsymbol{u}_2=[1\ \ 0]-\frac{3}{25}[3\ \ 4]=[\frac{16}{25}\ \ -\frac{12}{25}]$$

《解》☞ (A)；公式

17. 定義函數 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform) $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$，令 $\mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{e^{-2s}}{(s+3)^2}$，則 $f(t)$ 為何？其中 $u(t)$ 為單位步階 (unit step) 函數：

(A) $te^{-3(t-2)}u(t-2)$ (B) $(t-2)e^{-3t}u(t-2)$ (C) $(t-2)e^{-3(t-2)}u(t-2)$

(D) $t\,e^{-3t}u(t-2)$ 《喻超凡，喻超弘102地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (C)；

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}\} = (t-2)e^{-3(t-2)}u(t-2)$$

18. 假設隨機變數 X 的機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x} & ;\ 0 < x < 1 \\ 0 & ;\ \text{其他} \end{cases}$，試求出 k 的值為何？

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 1

《喻超凡，喻超弘102地方特考電力、電子工程》

《解》☞ (C)；因

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 k\sqrt{x}\,dx = k\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}k = 1$$

故 $k = \dfrac{3}{2}$